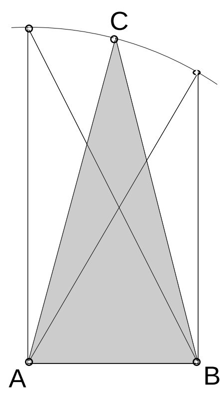
Aufsatz über eine Möglichkeit, den "Goldenen Schnitt" geometrisch in einer etwas ungewöhnlichen Art zu konstruieren.

Die verschwundene Seite

Johannes Kepler hat sich sowohl als Jüngling und später auch als bestandener Mann eingehend mit demjenigen rechtwinkligen Dreieck befasst, welches man gewinnt, wenn das gleichschenklige Dreieck der Spitze eines Pentagramms mit einem Zirkelschlag in die Rechtwinkligkeit übergeführt wird.

Manch ein Mathematiker der sogenannten Aufklärungszeit hat bedauert, dass ein so grosser Geist wie J. Kepler sich mit solch "mystischem Unsinn" befasst hat. Erst neuere Biographien liessen erkennen, dass J. Kepler wohl nie auf seine drei nach ihm benannten Gesetze über die Planetenumlaufbahnen gekommen wäre, wenn er nicht auch für einfache Dinge grosses Interesse gezeigt hätte. Gerade die Kepler'schen Gesetze sind ein Beweis dafür, dass die kosmischen Zusammenhänge sich nicht unbedingt in komplizierten Formalismen manifestieren müssen. Kepler hat in seinem dritten Gesetz zwar die Masse der Sonne und der jeweiligen Planeten nicht berücksichtigt, weil er davon nichts wissen konnte; aber seine Aussage, dass die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten sich so verhalten, wie die Kuben der grossen Halbachsen ihrer Bahnellypsen, ist eine äusserst gute Annäherung.

Die anfangs erwähnte Verwandlung des Pentagrammspitzes in ein rechtwinkliges Dreieck könnte man mit etwas Fantasie als eine Drei ecksmetamorphose bezeichnen. Dabei kann man feststellen, dass sich diese, ausgehend vom Pentagrammspitz, in zwei Richtungen vollziehen lässt (vgl. Figur 1).

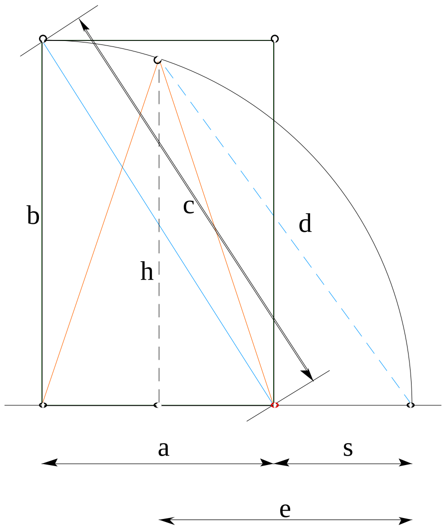


Figur 1

Da im Pentagrammspitz bekanntlich die Basis zu den Schenkeln in der Proportion des Goldenen Schnitts steht und die beiden rechtwinkligen Dreiecke durch einen Zirkelschlag mit dem Radius eines Schenkels gewonnen werden, stehen im Dreieck mit dem rechtem Winkel bei A die kleine und die grosse Kathete, beim Dreieck mit dem rechten Winkel bei B die kleine Kathete und die Hypothenuse im Goldenen Schnitt. Das erste war schon zu Platons Zeiten bekannt, wurde wahrscheinlich von *Eudoxos von Knidos* entdeckt und wird deshalb auch das *Eudoxos-Dreieck* genannt. In einem Kreis mit der grossen Kathete als Radius ist diese grosse Kathete die Seite eines regulären Sechsecks; im gleichen Kreis aber ist die kleine Kathete die Seite des regulären Zehnecks und die Hypothenuse diejenige des regulären Fünfecks. Dies ist es, was die Besonderheit dieses rechtwinkligen Dreiecks ausmacht. Das zweite, etwas stumpfere rechtwinklige Dreieck, welches aus dieser Verwandlung hervorgeht, wurde vermutlich erstmals von J. Kepler ausführlich behandelt, weshalb es vielfach das *Kepler-Dreieck* genannt wird. Dieses Dreieck, welches dem ägyptischen Dreieck mit den Seitenproportionen 3/4/5 sehr nahe kommt, mit diesem aber ausser der Rechtwinkligkeit nichts zu tun hat, ist ein wahrer Repräsentant des Goldenen Schnitts. Durch seine Rechtwinkligkeit respräsentiert es aber auch den pytagoreischen Lehrsatz und wird deshalb von E. Bindel[1] in Anlehnung an den Ausspruch Kepler's über die beiden geometrischen Phänomene als *Gold-Edelstein-Dreieck* bezeichnet.

1 Ernst Bindel, die ägyptischen Pyramiden, 1982, Stuttgart, S. 70

All das bisher Gesagte ist sicher allen Fanatikern des Goldenen Schnitts wohlbekannt und musste nur erläutert werden, um die folgenden Schritte einzuleiten. Figur 2 zeigt ein Eudoxos-Dreieck, welches zum Rechteck ergänzt wurde, den Pentagrammspitz und den Kreisbogen der „Dreiecksmetamorphose“ bis zur verlängerten Basis geschlagen. Es ist klar, dass die Strecke s der kleinere Abschnitt des Goldenen Schnitts zur Basis a ist, denn a + s = b und b ist die Verlängerung der Basis a im Goldenen Schnitt. Gestrichelt eingezeichnet ist in Figur 2 aber auch die Höhe des Pentagrammspitzes h und die Verbindungsstrecke d der Spitze mit dem Endpunkt von s. Dadurch wird das rechtwinklige Dreieck hed sichtbar.



Figur 2

Dieses Dreieck erfordert nun einige Aufmerksamkeit und es lässt sich nicht vermeiden, einige arithmetische Operationen anzustellen. Wem dies widerstrebt, der mag das folgende Kleingedruckte überspringen, wo es darum geht, zu beweisen, dass die Hypothenuse des gestrichelten Dreiecks hed der Hypothenuse des *Eudoxos-Dreiecks* abc entspricht.

Die Seiten des Dreicks hed berechnen sich wie folgt:

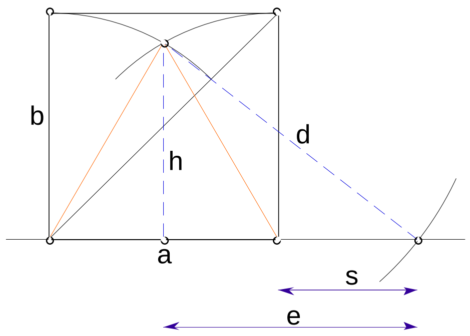
$h = \sqrt{b^2 - (a/2)^2}$. Da wir wissen, dass e - a/2, also s der Minor von a ist, so gilt für

$e = \sqrt{a^2 + (a/2)^2}$. Die Hypothenuse d berechnet sich ebenfalls pythagoreisch aus der Summe der beiden Kathetenquadrate:

$d = \sqrt{b^2 - (a/2)^2 + a^2 + (a/2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ermittelt man nun die Hypothenuse des Eudoxos-Dreiecks abc ebenfalls pythagoreisch, so erhält man $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Behauptung, dass die Hypothenuse des Dreiecks hed gleich der Hypothenuse des *Eudoxos-Dreiecks* ist, hat sich als wahr erwiesen. Diese Tatsache eröffnet die Möglichkeit, die Basis eines Eudoxos-Dreiecks nicht nur durch Herunterschlagen der grossen Kathete auf die verlängerte Basis im GS zu ergänzen, sondern auch damit, indem man die Hypothenuse des *Eudoxos-Dreiecks* vom Scheitel des Pentagrammspitzes auf die gleiche Basis abträgt. Beim Eudoxos-Dreieck und seinem "Metamorphosepartner", eben dem Pentagrammspitz hat sich dies nun als selbstverständlich



Figur 3

erwiesen, aber es stellt sich augenblicklich die Frage, wie sich denn diese Geschichte bei andern "Partnern" verhält. Nach dem Motto "Propieren geht über Studieren" kann man z.B. vom ersten platonischen Elementardreieck, dem gleichseitig-rechtwinkligen Dreieck, dem diagonal geteilten Quadrat also, ausgehen (vgl. Figur 3).

Nimmt man als Quadratseite 2, so ist die Quadratdiagonale $\sqrt{8}$ und die Höhe des "Metamorphosepartners", welchen man besser als das Verwandlungsdreieck bezeichnen könnte $\sqrt{3}$. Man erkennt sogleich, dass $e = \sqrt{5}$ und folglich $s = \sqrt{5} - 1$ ist, und erhält dasselbe Resultat wie vorhin beim *Eudoxos-Dreieck,* dass nämlich s der Minor von a+s ist. Der Verdacht, dass dieser Zusammenhang nicht nur in den zwei gezeigten Beispielen existiert, sondern in allen beliebigen rechtwinkligen Dreiecken (resp. Rechtecken) und deren Verwandlungsdreiecken auftritt ist nicht unbegründet. Die neue Behauptung lautet also dahin, dass aus der Diagonale eines jeden Rechtecks und der Höhe seines gleichseitigen Verwandlungsdreiecks ein Goldener Schnitt in Bezug auf die Rechteckbasis konstruiert werden kann. Meditiert man ein wenig über diesen Vorgang, so kann man klar sehen, dass bei der Verwandlung eines Rechtecks in sein gleichschenkliges Verwandlungsdreieck eine Rechteckseite verschwindet. Etwas Aehnliches geschieht, wenn man e pythagoreisch aus den Seiten h und d bestimmt (vgl. Figur 2).

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 - (b^2 - (a/2)^2)} = \sqrt{a^2 + (a/2)^2} \,.$$

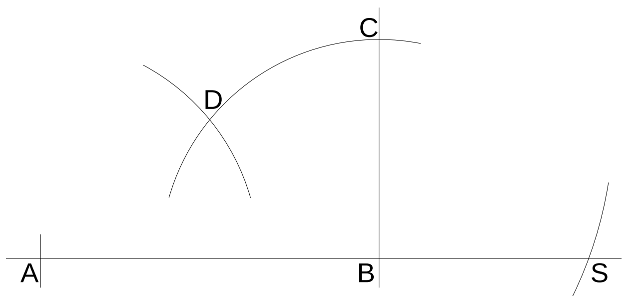
In dieser Gleichung verschwindet schlicht und einfach das b (resp. sein Quadrat) und somit kann angenommen werden, dass die Gleichung für alle Rechtecke gilt. Zur Ueberprüfung sei noch darauf hingewiesen, dass beim liegenden Doppelquadrat auch die Höhe des Verwandlungsdreiecks verschwindet, denn dessen Spitze fällt genau auf die Mitte der Basis. Dass von hier aus die Diagonale des Doppelquadrates abgetragen, die Verlängerung der Basis im Goldenen Schnitt ergibt, dürfte klar sein, denn es ist nichts anderes als eine Variante einer der gängigen Konstruktionen des Goldenen Schnitts.

Immer in der Annahme, dass die "Beweisführung" kräftig genug war, kann nun der verallgemeinernde Satz aufgestellt werden:

Die Differenz der Quadrate einer Rechteckdiagonalen und der Höhe des gleichschenkligen Verwandlungsdreiecks ergibt die Konstante 5 in Bezug auf das Quadrat der halben gemeinsamen Basis.

Diese Konstante kann aber auch $\sqrt{5}$ in Bezug auf die halbe Basis angesehen werden. Da nun $\left(\left(\left(a\sqrt{5}\right)-a\right)/2\right) : a$ stets den Goldenen Schnitt bedeutet, welche Zahl auch man für a einsetzt, kann folglich jedes über einer beliebigen Strecke errichtete Rechteck zur Ergänzung dieser Strecke im Goldenen Schnitt geometrisch angewendet werden. E. Bindel erwähnt im Zusammenhang mit dem Dreieck 3/4/5 den indischen Ausdruck "prapantschi", welcher übersetzt etwa "herausfünfen" bedeutet. Für das Herauskommen der 5 bei der pythagoreischen Operation mit Rechteckdiagonale und Höhe des Verwandlungsdreiecks scheint dieser Ausdruck gerade das Richtige zu sein.

Wie Figur 4 zeigt, ist für die Ergänzug einer Strecke im Goldenen Schnitt die Konstruktion eines Rechtecks und dessen Verwandlungsdreieck nicht einmal mehr nötig, sondern nur die Festlegung der markanten Punkte, deren Verbindungen die benötigten Strecken ergeben. Gegeben sei die Strecke AB, welche im Goldenen Schnitt ergänzt werden soll. In B errichte man eine Senkrechte. Nun nehme man einen Radius in den Zirkel, welcher zwar im Prinzip beliebig sein kann, von Vorteil für die Genauigkeit der Konstruktion aber ca. 2/3 der Strecke AB betragen sollte und schlage ihn um A und B, so dass sich die Schnittpunkte C und D ergeben. Nimmt man AC in den Zirkel und schlägt diesen Radius von D aus auf die verlängerte Basis AB, so bedeutet S die Ergänzung der Strecke AB im Goldenen Schnitt.



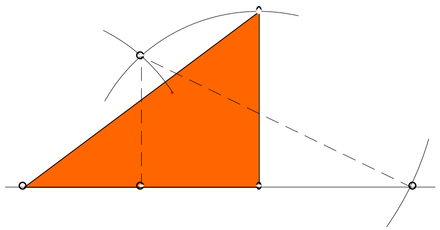
Figur 4

Die Anregung, für den Radius zur Ermittlung der Punkte C und D ca 2/3 der Ursprungsstrecke zu nehmen beruht nur darauf, dass bei der Wahl zu extremer Rechtecke das Konstruktionsprinzip zwar nicht beeinträchtigt wird, dass aber in der Praxis die Schnittwinkel des letzten Kreises mit der verlängerten Basis zu flach und somit ungenau werden. Die genaueste Konstruktion erlaubt das liegende Doppelquadrat, wobei dieses aber den Nachteil hat, dass zur Konstruktion des rechten Winkels auch noch die Basisstrecke AB halbiert werden muss.

Wenn man davon ausgeht, dass das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenproportionen 3/4/5, welches das *ägyptische Dreieck* genannt wird, bei der Erkennung und der Konstruktion von rechten Winkeln eine tragende Rolle gespielt hat, so ist es naheliegend, anzunehmen, dass sehr frühe Geometer für die Ermittlung des Goldenen Schnitt von diesem Dreieck ausgingen. Der Einwand eines grossen Teils der Historiker, dass es sowohl bei den Aegyptern. als auch bei den mesopotamischen Frühkulturen keine Hinweise darauf gibt, dass diese den Goldenen Schnitt gekannt hätten, sind nicht unbedingt stichhaltig. Es soll hier nicht die hundertjährige Kontroverse um die Proportionen der Cheopspyramide aufgegriffen werden, aber immerhin muss man feststellen, dass die Pyramide da ist und ihr Profildreick mit den ganzzahligen Ellenmassen 220/280/356 eine so gute Annäherung an das

Keplerdreieck ist, dass ein Zufall fast mit Sicherheit ausgeschlossen werden kann[2]. Auch das dem Goldenen Schnitt so verbundene Doppelquadrat, dessen Diagonale und die hier auftretenden Winkel wurden im Innern der Cheopspyramide erstaunlich exakt und das Basisquadrat der Pyramide fast haargenau getroffen. Die alten Aegypter mussten mit ihren "einfachen" Mitteln über Konstruktionsmethoden verfügt haben, von welchen wir uns heute keine Vorstellung mehr machen können. Aehnliches kann von den Sumern, den Babyloniern und den Assyrern gesagt werden, wenn auch nicht mit der Sicherheit wie bei den Aegyptern. Dies vor allem deshalb, weil der Zustand der mesopotamischen Bauruinen solch gute Messungen wie z.B. an den Pyramiden in Aegypten nicht erlaubte. Nicht bestritten allerdings wird bei den Babyloniern um ca. 1700 v. Chr. die Kenntnis des Prinzipes des pythagoreischen Lehrsatzes. Wenn also in jenen alten Zeiten das Gold des pythagoreischen Lehrsatzes bekannt war, wieso sollte denn der dazugehörige und von ihm umfasste Edelstein des Goldenen Schnittes unbekannt geblieben sein. Die Harmonie und Schönheit des Goldenen Schnitts könnte den Ausschlag gegeben haben, dass man ihn schon in alter Zeit gesucht hat, bewusst oder unbewusst. Erst mit *Platon* und *Eudoxos von Knidos*, resp. *Euklid* wird die Sache klarer, obwohl zu deren Zeiten die ersten dorischen Tempel fast schon wieder an Alterserscheinungen leiden mussten. Dass diese herrlichen alten Bauwerke, welche schon *Pythagoras von Samos* und *Thales von Milet* als Kinder bestaunen konnten, Goldene Schnitte und andere geometrische Finessen in jeder Menge aufweisen, wird von keinem noch so grossen Skeptiker ernsthaft bestritten.

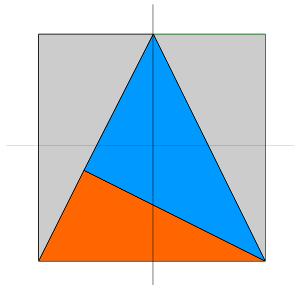
Wenn nun so ein Urgeometer als Hilfe für den rechten Winkel ein ägyptisches Dreieck verwendete und auf der Suche nach einer harmonischen Verlängerung der Basisstrecke die in Figur 4 gezeigte Konstruktion anwendete, so hatte er den Goldenen Schnitt genau getroffen, ohne dass er von den geometrischen Zusammenhängen eine Ahnung zu haben brauchte. Allein die Freude am Kreiseschlagen mit Pflöcken und Schnüren mag ihn dazu geführt haben (vgl. Figur 5).



Figur 5

2 Die Wahl eines Rückspunges bei der Mantelneigung von 5.5 Handbreite auf eine Höhe von 1 Elle ergibst exakt die Basis von 220 Ellen und die Höhe von 280 Ellen.

Das entstehende rechtwinklige Dreieck aber - man darf nun ruhig etwas staunen - ist nichts anderes als ein diagonal geteiltes Doppelquadrat, das dritte Elementardreieck des *Platon*. Hier spielt nun etwas herein, was man nicht zu wagen hoffte; die Verbundenheit nämlich des ägyptischen Dreiecks mit dem Goldenen Schnitt und dessen Repräsentanten, das Doppelquadrat. Noch besser sichtbar wird diese Verbundenheit, wenn man an die grosse Kathete eines ägyptischen Dreiecks ein diagonal geteiltes Doppelquadrat mit der gleichen grossen Kathete anfügt (vgl. Figur 6).

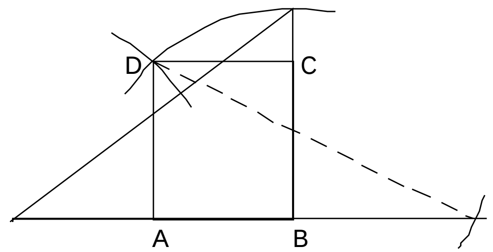


Figur 6

Das neu entstandene Dreieck ist ein sogenanntes *Knauth'sches* Dreieck, welches im Quadrat eingeschrieben ist und dessen Schenkel zur halben Quadratseite in der Proportion $\sqrt{5} : \frac{s}{2}$ stehen.

In der Proportionsliteratur von *Vitruv* bis heute wird das ägyptische Dreieck vielfach als Ersatz für den Goldenen Schnitt dargestellt, weil eben seine kleine Kathete zur Hypothenuse im Verhältnis 0.6 steht. Im Vergleich zum Idealwert 0.618033989... ist der Ersatz allerdings sehr praktisch und mag zur groben Annäherung bei kleineren Bauwerken genügen. Bei grossen Bauten aber ist die Abweichung nicht mehr akzeptabel, beträgt sie doch bei einer Seitenlänge von 60 m schon über einen Meter. Die Aegypter scheinen in Bezug auf solche Abweichungen bedeutend empfindlicher gewesen zu sein, denn die Verwendung des ägyptischen Dreiecks als Profildreieck für die Chefrenpyramide ist wissenschaftlich erwiesen und ihre Vorgängerin, die des Cheops weist ein Profildreieck mit den ganzahligen Massen von 220/280 Ellen auf, eine ebenfalls von den Aegyptologen bestätigte Tatsache. Das sind aber eindeutig zweierlei Stiefel, denn wäre das Profildreieck der Cheopspyramide ein ägyptisches, so wäre bei gleicher Basis die Höhe über 293 Ellen. In Anbetracht der präzisen Ausführung des ganzen Bauwerkes, kann wohl den Erbauern solche Liederlichkeit nicht unterstellt werden.

Als *W.F.Petrie* seine Messungen im Innern der Cheopspyramide vornahm, ist ihm sogleich aufgefallen, dass der Grundriss der sogenannten Königskammer ein absolut präzises Doppelquadrat ist. 206.12/412.24 engl. Zoll mit ev. möglichen Messabweichungen von 0.12 engl. Zoll war über jeden Zweifel erhaben. Mit der Höhe der Kammer hatte *W.F.Petrie* einige Mühe, denn die an den Wänden gemessene mittlere Höhe von 230.09 engl. Zoll liess sich nicht so leicht unterbringen. Da der britische Aegyptologe aber ein phantasievoller Mann war, kam er auf die Idee, dass es sich bei der Höhe um die Hälfte der Diagonale des Grundrisses handeln könnte. Nach dieser Theorie müsste die Höhe 230.45 engl. Zoll betragen, was bedeutet, dass die gemessene Höhe gegenüber dem Idealmass um ca. einen Zentimeter zu niedrig ist. Diese Annäherung ist wohl über jeden Zweifel erhaben, insbesondere, wenn man eine eventuelle Senkung der Decke mitsamt den Umfassungswänden unter den ungeheuren Drücken in Betracht zieht. Die kritischen Aegyptologen sind wohl nirgends pinkeliger, als wenn es sich um die Cheopspyramide handelt und so wurde *Petrie's* Königskammer-Theorie von *L. Borchardt* infolge Ungenauigkeit klar verworfen. Einerseits kann man Verständnis aufbringen für solche Härte, denn es ist wohl noch über kein Bauwerk so viel Unsinn geschrieben worden, wie über die Cheopspyramide. Anderseits ist aber diese Zurückhaltung bei der Königskammer nicht am Platz, denn die Bestimmung ihrer Höhe durch die Verwendung der halben Grundrissdiagonalen ist doch wahrhaftig nicht so kompliziert. Ein wenig umständlicher hätten es aber die Pyramidenplaner auch noch haben können, denn die Höhe des Verwandlungsdreiecks eines liegenden ägyptischen Dreiecks ergibt genau die Hälfte der Diagonale eines Doppelquadrates mit den Seitenlängen der Basis und deren Hälfte vgl. Figur 7).

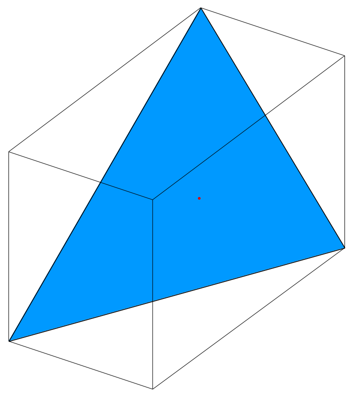


Figur 7

Das Rechteck ABCD entspricht der kleinen Seite des Quaders, welcher die Königskammer bildet. *K. Kleppisch,* welcher sich eingehend mit der Cheopspyramide befasste, vollzog in diesem Rechteck einige interessante Konstruktionen, welche jeweils zu Teilungen im Goldenen Schnitt führten, ein Unterfangen, welches ihm von *L. Borchardt* schwer angekreidet wurde. Dies mit der Begründung, dass die Aegypter zu solchen Manipulationen wohl kaum imstand gewesen seien. Tatsächlich hat K. Kleppisch mit seinen Ableitungen des Goldenen Schnitts aus der kleinen Quaderseite etwas zu weit gesucht, denn das Verwandlungsdreieck der Quaderseite ist das Knaut'sche Dreieck und dessen Hinweise auf den Goldenen Schnitt sind ja nicht zu übersehen. Alle diese Manipulationen können aber einfach mit Pflöcken und Schnüren auf einfachste Weise vorgenommen werden. Die Harpetonapten, die ägyptischen Vermesser, werden wohl allein anbetrachts der präzisen Grundrissanlagen ihr Handwerk besser verstanden haben, als ihnen dies von *L. Borchardt* zugemutet wird.

Der mathematisch unanfechtbare Zusammenhang des ägyptischen Dreiecks mit dem *Doppelquadrat* und dem Goldenen Schnitt, welcher z.B. aus Figur 5 hervorgeht, zeigt sich im *Königskammer-Quader* besonders schön. Eine lange Kante, eine Diagonale der kleinen Seite und eine Raumdiagonale bilden ein ägyptisches Dreieck (vgl. Figur 8)

Als Beweis für diese Tatsache sei auf eine Feststellung von *Pythagoras* bezüglich der Paralellepipedone hingewiesen, welche das Auftreten des ägyptischen Dreiecks in diesem speziellen Fall erklärt.



Figur 8

Der Goldene Schnitt als geometrisches Resultat einer verschwundenen Rechteckseite, der arithmetische Beweis mit der verschwundenen Rechteckhöhe und das Zusammenspiel von Doppelquadrat, ägyptischem Dreieck und Goldenem Schnitt können aufzeigen, dass die Beschäftigung mit elementarer Mathematik keineswegs langweilig und abgedroschen zu sein braucht. Wenn in dieser laienhaften Betrachtung wieder einmal mehr die Cheopspyramide zur Geltung kam, so keineswegs, um die Spekulationen der Pyramidenfanatiker zu nähren, sondern weil in diesem grossartigen Bauwerk die besprochenen Komponenten sorgfältig eingebettet sind. Die mächtigen *Eudoxos-Dreiecke* der Mantelseiten sind wie Botschafter nach aussen gewandt, in alle vier Himmelrichtungen rufend. Im Innern aber tritt das *Doppelquadrat*, einer der Ursprünge des Goldenen Schnitts in Erscheinung; ebenso die kleine Seite des *Königskammer-Quaders* mit ihren deutlichen Hinweisen auf den Goldenen Schnitt und in diesem Quader drin, wie ein ungeborenes Kind, das *ägyptische Dreieck.* Ueberhaupt nicht sichtbar, aber theoretisch fest verankert, sozusagen als ätherisches Gerippe ist es das Profildreieck, das *Gold-Edelstein-Dreieck,* welches das ganze Gebilde zusammenhält. Der mutmassliche Erbauer der Cheopspyramide, *Hem-On,* wahrscheinlich ein Bruder des Pharao, Hohepriester, Wesir und Baumeister, hat nach Meinung *L. Borchardt's* mit der Wahl des Basiswinkels ein wahres Unheil angerichtet, weil er mit dieser Wahl die Pyramidentheorien erst ermöglichte. Nach Ansicht der meisten Aegyptologen wählte *Hem-On* diesen Winkel völlig zufällig oder aber, weil er sich das Rechnen leicht machen wollte. Das Ergebnis allerdings, welches aus diesem Zufall und solcher Bequemlichkeit resultierte ist eines der grössten Bauwerke der Erde und seine Präzision übertrifft fast alles bisher da gewesene.

Basel, 19.12.2001

Alfred Hoehn