

FIBONACCI- UND LUCASFOLGEN IN DER PHYLLOTAXIS

Unter Phyllotaxis wird allgemein in der Botanik die Blattanordnung, die Position der Scheinblüten z.B. der Sonnenblume und die Schuppen der Tannzapfen, der Ananas und dergleichen mehr verstanden. Ganz besonders ausgeprägt ist die Phyllotaxis bei den Kakteen. Bei der Sonnenblume kommt die Phyllotaxis in den sogenannten Parastichen, d.h. die spiralförmige Anordnung der Samenkapseln auf dem Blütenboden, sehr schön zur Geltung. Dabei spielt die Fibonaccifolge eine unübersehbare Rolle. Zählt man die gleichartigen Parastichen, so wird man eine Fibonaccizahl erhalten, wobei die nächsten gegenläufigen Parastichen die vorangehende, resp. folgende Fibonaccizahl ergeben wird. Die Fibonaccifolge entwickelt sich rekursiv:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

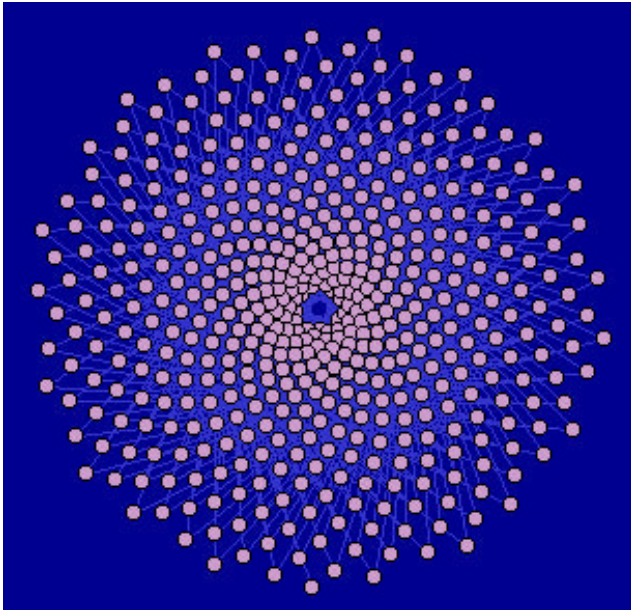
Also: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Geometrisch kann die Phyllotaxis wie folgt dargestellt werden: Auf einer engen Spirale werden die Punkte abgetragen, welche sich durch Drehung eines Strahls um einen Punkt und dem sogenannten Divergenzwinkel ergeben. Es gilt als erwiesen, dass die Winkel, welche sich durch die Teilung des Vollwinkels im goldenen Schnitt ergeben, also $360 \times 0.618... = 222.4922^\circ$ und $360 \times 0.3819... = 137.5078^\circ$.., die platzsparendste Packung der Samenkapseln auf dem Blütenboden ermöglichen.

Figur 1 Blütenboden Sonnenblume



Figur 2 Computersimulation



J. W. Goethe hat bereits auf die Spiraltendenz der Vegetation hingewiesen. K. F. Schimper, A. Braun und die Gebrüder Bravais haben in der ersten Hälfte des 19. Jahrh. Die Blattstellungen und Blütenstände untersucht und die Spiralmuster, sowie das Auftreten der Fibonaccizahlen in der Anzahl der Parastichen erkannt.

Die Sonnenblume eignet sich besonders gut, die links- und rechtsläufigen Parastichen zu zählen. Figur 1 zeigt die Photographie eines Blütenbodens mit den gut erkennbaren Parastichen 21 und 34. Bei grossen Blütenständen können die Parastichen 144 und wenn man etwas Glück hat, diejenigen mit der Fibonaccizahl 233 erkennen. Alle diese Parastichen entstehen aus der Ursprungsspirale, welche sehr eng angelegt sein muss. Ob diese nun eine archimedische, logarithmische oder andersartige Spirale sei, ist nur schwer entscheidbar. H. Reis(1) stellt die beiden Theorien gegenüber und stellt fest, dass die Naturbeobachtungen dem archimedischen Modell den Vorzug zu geben scheint. Bei der logarithmischen Spirale verdichten sich die Samenstände gegen die Mitte so sehr, dass dies zumindest für die Sonnenblume nicht in Frage kommt. Figur 2 wurde mittels Excel 5.0 als Diagramm erstellt und weist die folgenden Daten auf:

$$x_n = r(\cos \delta_n); y_n = r(\sin \delta_n); \quad \delta = n\delta_1; \quad \delta_1 = 137.5078\dots$$

Für jede neue Koordinate für x, y wird δ (für den Divergenzwinkel) mit n multipliziert. Für r nimmt man am besten die Folge der natürlichen Zahlen, beginnend mit 0 oder einer andern kleinen Zahl. Wenn $r = 0$, so

beginnen die Parastichen im Zentrum. Je nach Grösse von r beginnen die Parastichen ausserhalb des Zentrums und lassen die Mitte des theoretischen Blütenbodens frei, wo die einzelnen Punkte sowieso sehr eng liegen. Die Uebereinstimmung einer solchen Computersimulation mit der Photographie des Blütenbodens ist frappant. Man muss annehmen, dass Abweichungen der Natur in einzelnen Kurven auf Wachstumsprobleme zurück zu führen sind.

In Figur 2 wurden 350 Punkte abgebildet und hier werden vor allem die Parastichen 21 und 34 sehr gut sichtbar. Nimmt man weniger Punkte, so werden eher die kleineren Fibonaccizahlen erkennbar. Für das Titelbild dieses Aufsatzes wurden insgesamt 4000 Koordinaten berechnet und wenn man des Zählens nicht müde wird, kann man sogar die Parastichen der Fibonaccizahl 233 erkennen. Diese Parastichenbilder haben einen grossen ästhetischen Gehalt und gehen weit über die Aussage eines trockenen mathematischen Theorems hinaus.

Die Gebrüder Bravais erklärten im Gegensatz zu Schimper und Braun, dass die Divergenzwinkel auch in der Natur irrational seien. Sie begründeten diese Annahme mit der Beobachtung von weiteren Divergenzwinkeln, welche alle sozusagen Abkömmlinge des goldenen Schnitts sind. Diese Winkel sind:

$$\begin{aligned} 360 / \tau + 1 &= 137.5078^\circ\dots \\ 360 / \tau + 2 &= 99.5016^\circ\dots \\ 360 / \tau + 3 &= 77.9552^\circ\dots \\ 360 / \rho^2 + 2 &= 151.135^\circ\dots \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}; \rho = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Die Divergenzwinkel der Gruppe $360 / \tau + n = \delta$, welche bis $n = 3$ in der Natur beobachtet werden führen ausser zur Fibonaccifolge zu weiteren rekursiven Folgen, deren erstes Glied jeweils die eins ist. Von der Fibonaccifolge abweichende rekursive Folgen werden als Lucasfolgen bezeichnet.

Tabelle 1

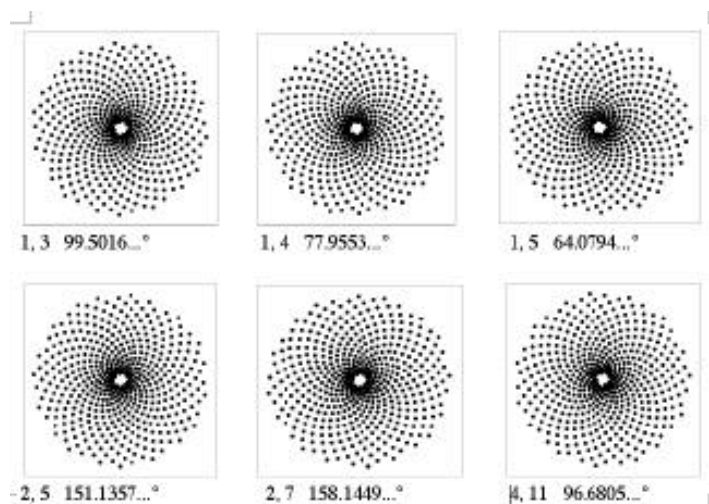
Lucasglieder

n	0	1	2	3	4	5	6	7	Divergenz	Divergenzwinkel
1	1	1	2	3	5	8	13	21	0.38196601	137.5077641
2	2	1	3	4	7	11	18	29	0.27639320	99.50155283
3	3	1	4	5	9	14	23	37	0.21654236	77.95525129
4	4	1	5	6	11	17	28	45	0.17799821	64.07935601
5	5	1	6	7	13	20	33	53	0.15110228	54.39681946
6	6	1	7	8	15	23	38	61	0.13126746	47.25628693
7	7	1	8	9	17	26	43	69	0.11603575	41.77286844

In dieser Tabelle wird auch L_0 angegeben. Für gewisse mathematische Operationen ist diese Nummerierung nötig, im Zusammenhang der Folgen mit der Phyllotaxis aber nicht von Bedeutung. An zweiter Stelle der Tabelle erkennt man die nebst der Fibonaccifolge berühmteste rekursive Folge $1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$. In der Literatur wird sie die „abnormale“ oder die Lamé'sche Folge genannt. Für alle rekursiven Folgen der Art $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ soll hier der Name Lucasfolgen nach dem französischen Mathematiker Edouard Lucas verwendet werden. Nun ist es eine Tatsache, auf welche eben E. Lucas hinwies, dass die Quotienten benachbarter Glieder beliebiger Lucasfolgen nach τ resp. ρ divergieren. H. Baravalle(2) nennt dies so: „Man nehme zwei beliebige natürliche Zahlen, addiere sie und fahre fort, wie von der Fibonaccifolge bekannt. Man wird stets zum goldenen Schnitt kommen...“

Daraus folgt, dass jede beliebige Lucasfolge zu einer Divergenz resp. zu einem Divergenzwinkel führt, welcher ein Parastichenbild ergibt, aus welchem wiederum die Lucasfolge zu erkennen ist. In der Botanik hat man eine ganze Reihe solcher Divergenzen erkannt, doch muss man sehen, dass die überwältigende Mehrheit der Divergenzen auf der Fibonaccifolge und deren Vernehrfachungen beruhen. C. Marzec und J. Kappraff(3) geben eine Serie solcher Divergenzen, mitsamt der Bestimmungsformel und dem Kettenbruch an (vgl. Tabelle 2). Es ist allerdings nicht genau definiert, ob alle diese Lucasfolgen in der Natur vorkommen oder ob es sich um theoretische Beispiele handelt. Die Gebrüder Bravais haben bei *Dispacus sylvestris* oder der „wilden Karde“ nebst Fibonacci- und deren vermehrfachten Folgen auch die Folgen $1, 3; 1, 4; 1, 5; 2, 5; 2, 7; 4, 11$ gefunden. Bei Tanzzapfen kann nicht selten die Folge $1, 3$ und bei Kakteen können ebenfalls nebst der Fibonaccifolge andere, zum Teil exotische Folgen festgestellt werden. Gerade die Kakteen dürften in dieser Hinsicht noch einiges bieten und wäre die Mühe wert, in einer reichhaltigen Kakteensammlung auf die Suche zu gehen.

Figur 3



Figur 3 zeigt die „Idealmodelle“ der von den Gebrüdern Bravais bei der „wilden Karde“ gefundenen Lucasfolgen. Auf den ersten Blick gleichen sich die Parastichenbilder sehr und unterscheiden sich scheinbar nur durch den Spin der sich gleichenden Parastichen..Zählt man jedoch die Parastichen, so entspricht deren Anzahl jeweils den Gliedern der entsprechenden Lucasfolge. Man kann an diesem Beispiel gut erkennen, dass eine optimale Verteilung der einzelnen Punkte auch bei einer „indirekten“ Einwirkung des Goldenen Schnitts zustande kommt.

Tabelle 2. Marzec und Kappraff (aus Journal of Theoretical Biology, 1983, S.214)

The first 19 Φ_G , their continued fraction representation, and their Φ representation.

Degrees	Φ	Continued fractions	Degrees	Φ	Continued fractions
167·356	$\frac{1+6\tau}{2+13\tau}$	[0; 2, 6, $\bar{1}$]	106·447	$\frac{1+2\tau}{3+7\tau}$	[0; 3, 2, $\bar{1}$]
165·289	$\frac{1+5\tau}{2+11\tau}$	[0; 2, 5, $\bar{1}$]	99·501	$\frac{\tau}{1+3\tau}$	[0; 3, $\bar{1}$]
162·415	$\frac{1+4\tau}{2+9\tau}$	[0; 2, 4, $\bar{1}$]	96·680	$\frac{1+3\tau}{4+11\tau}$	[0; 3, 1, 2, $\bar{1}$]
158·145	$\frac{1+3\tau}{2+7\tau}$	[0; 2, 3, $\bar{1}$]	82·155	$\frac{1+2\tau}{4+9\tau}$	[0; 4, 2, $\bar{1}$]
151·135	$\frac{1+2\tau}{2+5\tau}$	[0; 2, 2, $\bar{1}$]	77·955	$\frac{\tau}{1+4\tau}$	[0; 4, $\bar{1}$]
148·771	$\frac{2+5\tau}{5+12\tau}$	[0; 2, 2, 2, $\bar{1}$]	66·890	$\frac{1+2\tau}{5+11\tau}$	[0; 5, 2, $\bar{1}$]
137·507	$\frac{\tau}{1+2\tau}$	[0; 2, $\bar{1}$]	64·079	$\frac{\tau}{1+5\tau}$	[0; 5, $\bar{1}$]
132·177	$\frac{1+3\tau}{3+8\tau}$	[0; 2, 1, 2, $\bar{1}$]	54·396	$\frac{\tau}{1+6\tau}$	[0; 6, $\bar{1}$]
129·336	$\frac{1+4\tau}{3+11\tau}$	[0; 2, 1, 3, $\bar{1}$]	47·256	$\frac{\tau}{1+7\tau}$	[0; 7, $\bar{1}$]
109·877	$\frac{1+3\tau}{3+10\tau}$	[0; 3, 3, $\bar{1}$]			

Die Formel zur Berechnung der Divergenz von Marzec und Kappraff weist darauf hin, dass die Lucasfolgen sich in Gruppen zusammenfassen lassen, wobei der Zähler der Formel eine sogenannte Differenzfolge dieser Gruppe charakterisiert. Davon mehr im Aufsatz über die *Systematik der Lucasfolgen (erscheint demnächst auf dieser Website)*.

Die ebenfalls in der Tabelle von Marzec und Kappraff angegebenen Kettenbrüche der Divergenzen bieten eine reizvolle Möglichkeit, aus der an der Pflanze festgestellten Lucasfolge die

Divergenz und den Divergenzwinkel zu berechnen und das Parastichendiagramm mit dem Computer aufzuzeichnen. Dazu ist zu bemerken, dass die übergestrichene Eins im Kettenbruch eine unendliche Folge von Einsen bedeutet, d. h. eigentlich nichts anderes als τ . Den Kettenbruch berechnet man, indem man aus den am Objekt erkannten aufeinanderfolgenden Lucaszahlen durch Subtraktion L_1 und L_2 ermittelt. Nun dividiert man L_1/L_2 , nimmt vom Quotienten den reziproken Wert und notiert sich die natürliche Zahl vor dem Komma. Vom Rest nimmt man wiederum den reziproken Wert und verfährt so weiter. Ist der reziproke Wert selbst eine natürliche Zahl, so ist auch diese Zahl zu notieren und die Berechnung ist zu Ende. Nun kann man den Kettenbruch aufstellen, indem zuhinterst die übergestrichene Eins und danach von hinten nach vorne die natürlichen Zahlen als Kettenbruchglieder in der ermittelten Reihenfolge einsetzt. Als Beispiel diene hier die Lucasfolge 3, 7,...:

$$\frac{7}{3} = 2.333... \quad \text{also } 2$$

$$\frac{3}{7} = 0.428571... \quad \text{also } 3$$

$$\delta = [0; \overline{3}, 2] 1$$

Die Divergenz berechnet man nun aus dem Kettenbruch ebenfalls direkt wie folgt:

$$\delta = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{1.6180339...} + 2} + 3} = 0.295686...$$

Sowohl die Methode von Marzec und Kappraff, sowie die eben gezeigte führen zu Divergenzen resp. Divergenzwinkeln mit irrationalen Werten, weil mit der Zahl τ operiert wurde. Damit werden für die Divergenzwinkel „Idealwerte“ erreicht, welche mathematisch zwar klar definiert sind, in der Natur aber wahrscheinlich nicht vorkommen oder zumindest nicht nachweisbar sind. In der Regel wird von dem Winkel von 137.5° ausgegangen, d. h. also vom Divergenzwinkel der rekursiven Folge 1, 2, 3, 5, 8, ..., deren Kettenbruch für die Divergenz $[0; \overline{2}, 1]$ lautet. Dass dabei von der Fibonaccifolge geredet wird, ist nicht ganz richtig, denn die Fibonaccifolge beginnt mit zwei Einsen. Der Kettenbruch lautet $[0; \overline{1}]$ und ergibt als Divergenz 1.6180339..., also τ , was einen Divergenzwinkel von 222.4922° ausmacht. Dieser Winkel ergibt dasselbe Parastichenbild wie derjenige der Folge 1, 2, 3, ...; nur mit umgekehrtem Spin. Bei den Pflanzen, insbesondere bei den Kakteen kommen beide Spins vor.

Zur alten Kontroverse, ob die Divergenzen irrational oder rational seien, kann ein Vermittlungsvorschlag gemacht werden, indem man davon ausgeht, dass die Vegetationspunkte sich genau so verhalten wie die Fibonaccifolge oder die vorkommenden Nebenfolgen. Nehmen wir dazu die Folge 1, 2, 3, 5, 8, ... und entwickeln von den beiden ersten Gliedern den Kettenbruch der Diver-

genz, also $\delta = [0; \frac{1}{2}] = 0.5$, so ergibt dies mit $0.5 \times 360^\circ$ für den ersten Divergenzwinkel 180° . Dasselbe tun wir mit allen folgenden Gliederpaaren 2,3; 3,5 usw. Wir werden bemerken, dass mit jedem weiteren Gliederpaar eine 1 im Kettenbruch dazukommt. Die folgende Tabelle zeigt

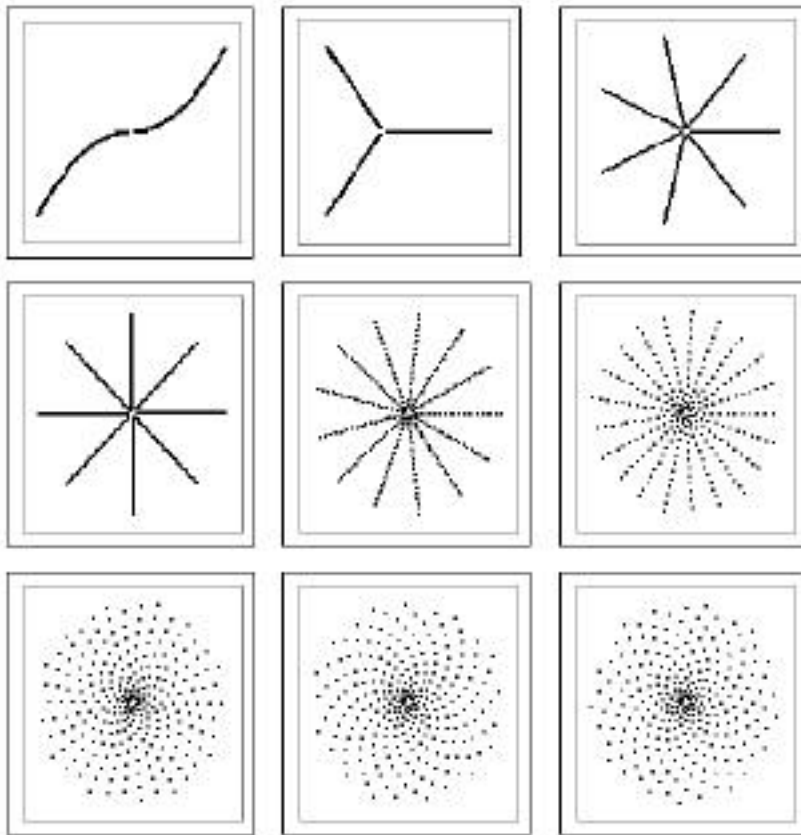
Diese Entwicklung:

Tabelle 3

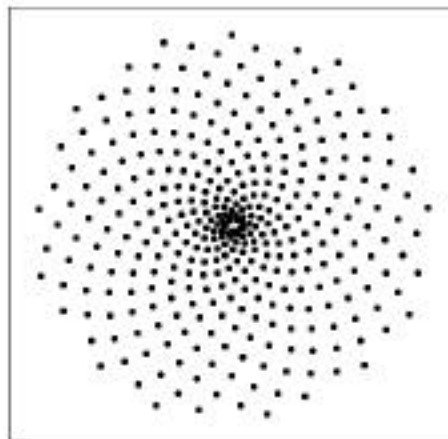
		Kettenbruch	Divergenz	Divergenzwinkel
1	2	0;2	0.5	180
2	3	0;2,1	0.333...	120
3	5	0;2,1,1	0.42857143...	154.2857143...
5	8	0;2,1,1,1	0.375	135
8	13	0;2,1,1,1,1	0.38461538...	138.4615385...
13	21	0;2,1,1,1,1,1,	0.38095230...	137.6470588...
21	34	0;2,1,1,1,1,1,1,	0.38235290...	137.1428571...
34	55	0;2,1,1,1,1,1,1,1,	0.38181818...	137.4545455...
55	89	0;2,1,1,1,1,1,1,1,1,	0.38202240...	137.5280600...
89	144	0;2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,	0.38188860...	137.4799300...
Idealwert		0;2,1.....	0.38196590...	137.5077240...

Die sich aus der Tabelle ergebende Triebentwicklung hat grosse Übereinstimmung mit einer Computersimulation von Peter Peisl (4), welche nur die Wachstums- und Nahrungskonkurrenz als Steuerelement berücksichtigt und schliesslich auch zu einem Divergenzwinkel um die 137.5° resp. 222.5° kommt. Was auch immer die Ursache für die von der Natur gewählten oder ersonnenen Divergenzwinkel sei, sicher ist ihre auffallende Nähe und Abhängigkeit zum goldenen Schnitt. Es wurde auch schon die Frage aufgestellt, ob die Pflanzen zählen können? Sicherlich nicht im Sinn des Zählens in der Mathematik. Da liegt doch die Konkurrenztheorie viel näher. A. Beutelspacher (5) bezeichnet in seinem Buch „Der Goldene Schnitt“ τ und ρ als am schlechtesten mit ganzen Zahlen approximierbare Zahlen überhaupt. Dadurch, dass die Pflanzen in der Phyllotaxis diesen Zahlen sehr nahe kommen, ergibt sich, dass jeder neue Trieb in der Vielzahl seiner Vorgänger eine kleine Lücke findet, welche ihm Licht und Nahrung verschafft. Insofern haben also Konkurrenz und goldener Schnitt etwas miteinander zu tun, denn der Goldene Schnitt ermöglicht es, die Konkurrenz erträglich zu gestalten und damit die Lebensumstände der Pflanze zu optimieren. In einem „Brief aus dem botanischen Garten Zürich“ schreibt Rolf Rutishauser (6) :“Warum bei vielen nicht näher miteinander verwandten Pflanzen näherungsweise der Fibonacciwinkel von 137.5° auftritt, ist bis heute jedoch nicht eindeutig geklärt“. Dies dürfte sich bis heute nicht sehr geändert haben. Abschliessend seien noch die Parastichendiagramme der in Tabelle 3 aufgeführten Divergenzwinkel vergleichsweise gezeigt (vgl. Figur 4). Figur 5 zeigt das Diagramm mit dem Idealwinkel von 137.507734° ...

Figur 4



Figur 5



Man sieht, dass bei den ersten Kombinationen nichts Besonderes herauskommt. Bei $13/21$ aber kann man in der Mitte bereits die beginnenden Parastichen erkennen. Je höher wir gehen, desto besser wird die Annäherung an die Idealfigur. Aber schon bei $55/89$ fällt der Unterschied nicht

mehr ins Gewicht und könnte in natura an der Pflanze wohl nur sehr schwer definiert werden. Interessant ist auch, dass die Diagramme 13/21 und 21/34 grosse Aehnlichkeit mit gewissen Kakteen haben, welche ebenfalls diese senkrecht zum Pool verlaufenden Rippen aufweisen (vgl. Figur 6). Die Zahl der Rippen allerdings kann unterschiedlich sein. Die Phyllotaxis der Kakteen wird noch selten behandelt und bedarf sicher einer vermehrten Forschung.

Figur 6 echinocatus grusini



Literaturhinweise

- (1) Helmut Reis, „Der Goldene Schnitt...“, Bonn 1990
- (2) Hermann von Baravalle, „Die Geometrie des Pentagramms...“, Stuttgart, 1985
- (3) C. Marzec und J. Kappraff, „Properties of Maximal Spacing on an Circle....“ Journal of Theoretical Biology, London, 1983
- (4) Peter Peisl, Quelle unbekannt
- (5) Albrecht Beutelspacher, „Der goldene Schnitt“, Mannheim, 1988
- (6) Rolf Rutishauser, „Briefe aus dem botanischen Garten Zürich“, Zürich April 1995