

## FIBONACCI- UND LUCASFOLGEN IN DER PHYLLOTAXIS

Unter Phyllotaxis wird allgemein in der Botanik die Blattanordnung, die Position der Scheinblüten z.B. der Sonnenblume und die Schuppen der Tannzapfen, der Ananas und dergleichen mehr verstanden. Ganz besonders ausgeprägt ist die Phyllotaxis bei den Sonnenblumen, den Ananasfrüchten und den Kakteen. Visuell zeigt sich die Phyllotaxis in den sogenannten Parastichen, d.h. die spiralförmige Anordnung der Samenkapseln auf dem Blütenboden, den Früchten oder in ihrer Gesamtstruktur. Dabei spielt die Fibonaccifolge eine unübersehbare Rolle. Zählt man die gleichartigen Parastichen, so wird man eine Fibonaccizahl erhalten, wobei die nächsten gegenläufigen Parastichen die vorangehende, resp. folgende Fibonaccizahl ergeben wird. Die Fibonaccifolge entwickelt sich rekursiv:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad \text{wobei } F_0 = 0; F_1 = 1$$

Also: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

Geometrisch kann die Phyllotaxis der Sonnenblume wie folgt dargestellt werden: Auf einer engen Spirale werden die Punkte abgetragen, welche sich durch Drehung eines Strahls um einen Punkt und dem sogenannten Divergenzwinkel ergeben. Es gilt als erwiesen, dass die Winkel, welche sich durch die Teilung des Vollwinkels im goldenen Schnitt ergeben, also

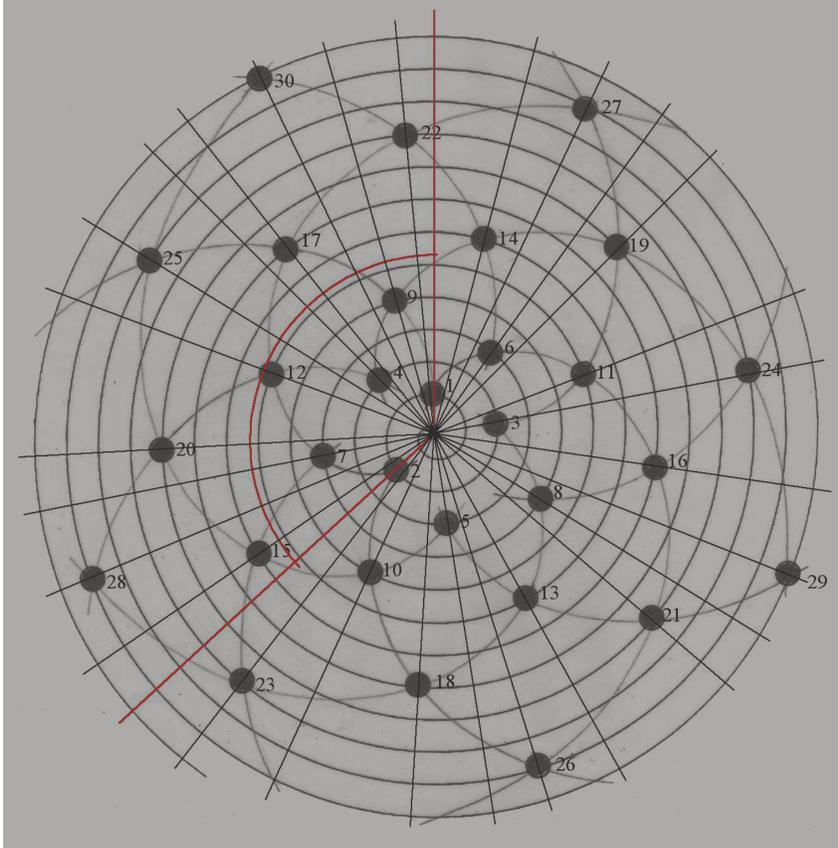
$$360 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 222.4922^\circ \text{ und } 360 \times \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 137.5078^\circ, \text{ eine sehr Platz sparende Packung}$$

der Samenkapseln auf dem Blütenboden ermöglichen. In Figur 1 ist schematisch dargestellt, wie sich die einzelnen Punkte, d.h. Orte der einzelnen Samenkapseln bei Annahme eines Divergenzwinkels  $\omega$  von  $137.50^\circ$  auf einer archimedischen Spirale verteilen. Man kann hier deutlich die spiralförmige Anordnung der Punkte (Parastichen) von innen nach aussen beobachten, wobei sich in dieser stark auseinander gezogenen Darstellung besonders die Fibonaccizahlen 5 und 8 zeigen. Die einzelnen Punkte sind in der Reihenfolge ihres Wachstums nummeriert und man deshalb gut erkennen, dass bei den 5er-Parastichen die Differenz jeweils 5 und bei den 8er-Parastichen jeweils 8 beträgt. Während dem also die Anzahl der gleichwertigen Parastichen Teile einer rekursiven Folge sind, sind die Punkte jeder einzelnen Parastiche Teile einer arithmetischen Folge (vgl. Figur 1).

Die Frage, ob sich in der Natur das Wachstum auf einer logarithmischen, archimedischen oder einer andersartigen Spirale abwickelt, ist nach wie vor ungeklärt. Bei der logarithmischen Spirale verdichten sich die Samenstände nach innen so sehr, dass sie zumindest für die Sonnenblume und gleichartige Wachstumsbilder nicht in Frage kommt. Zu einer ebenen geometrischen Darstellung eignet sich die archimedische Spirale, denn diese ergibt ein recht gutes Abbild eines Blütenbo-

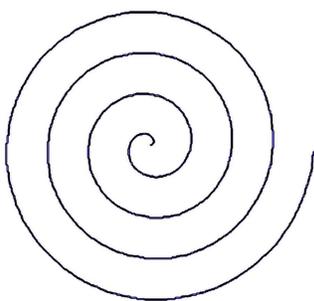
dens der Sonnenblume, obwohl die Verdichtung nach innen immer noch zu stark erscheint. H. Reis [RH] schlägt eine Wachstumsspirale vor, welche sich nach aussen weitet und er erreicht

Figur 1

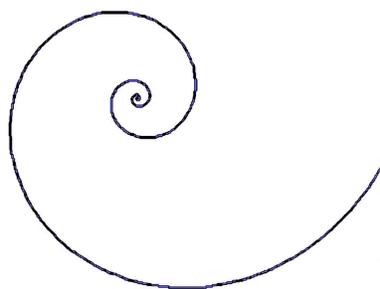


dies, indem die Abstände der Fibonnachzahlen von der Mitte aus von  $\sqrt{n}$  bestimmt werden. Mit dieser Methode lässt sich ein ausgereifter Blütenboden sehr gut darstellen (vgl. Figur 2).

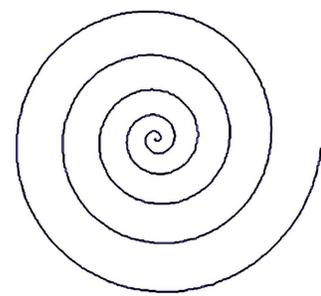
Figur 2



archimedische Spirale



logarithmische Spirale



$\sqrt{n}$ -Spirale

J. W. Goethe hat bereits auf die Spiraltendenz der Vegetation hingewiesen. K. F. Schimper, A. Braun und die Gebrüder Bravais haben in der ersten Hälfte des 19. Jahrh. Die Blattstellungen und Blütenstände untersucht und die Spiralmuster, sowie das Auftreten der Fibonaccizahlen in der Anzahl der Parastichen erkannt.

Die Sonnenblume eignet sich besonders gut, die links- und rechtsläufigen Parastichen zu zählen. Figur 3 zeigt die Photographie eines Blütenbodens mit den gut erkennbaren Parastichen 21 und 34. Bei grossen Blütenständen können die Parastichen 144 und wenn man etwas Glück hat, diejenigen mit der Fibonaccizahl 233 erkennen. Alle diese Parastichen entstehen aus der Ursprungsspirale, welche sehr eng angelegt sein muss.

Figur 4 zeigt eine Computersimulation mit den ebenfalls gut sichtbaren parastichen 21 und 34. Die Simulation wurde mittels Excel 5.0 als Diagramm erstellt und weist die folgenden Daten auf:

$$x_n = r(\cos \delta_n); \quad y_n = (r \sin \delta_n); \quad \delta = n\delta_1; \quad \delta_1 = 137.5078^\circ$$

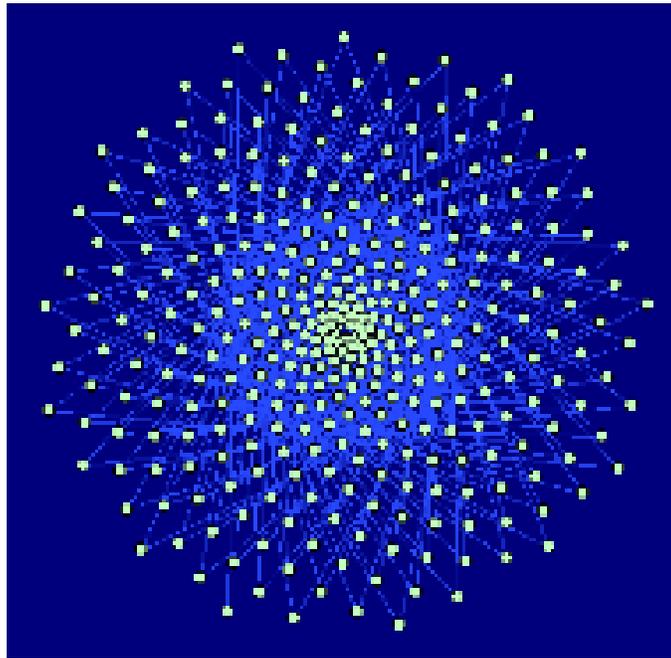
Für jede neue Koordinate für  $x,y$  wird  $\delta$  (für den Divergenzwinkel) mit  $n$  multipliziert. Für  $r$  nimmt man z. B. die Folge der natürlichen Zahlen, beginnend mit 0 oder einer andern kleinen Zahl. Wenn  $r = 0$ , so beginnen die Parastichen im Zentrum. Je nach Grösse von  $r$  beginnend die Parastichen ausserhalb des Zentrums und lassen die Mitte des theoretischen Blütenbodens frei, wo die einzelnen Punkte sowieso sehr eng liegen. Die Uebereinstimmung einer solchen Computersimulation mit der Photographie des Blütenbodens ist frappant. Man muss annehmen, dass Abweichungen der Natur in einzelnen Kurven auf Wachstumsprobleme zurück zu führen sind.

Figur 3                      Sonnenblume (*Helianthus annuus*)



Figur 4

Computersimulation



In Figur 4 wurden 350 Punkte abgebildet. Nimmt man weniger Punkte, so werden eher die kleineren Fibonaccizahlen erkennbar und umgekehrt.. Für das Titelbild dieses Aufsatzes wurden insgesamt 4000 Koordinaten berechnet und wenn man des Zählens nicht müde wird, kann man sogar die Parastichen der Fibonaccizahl 233 erkennen. Diese Parastichenbilder haben einen grossen ästhetischen Gehalt und gehen weit über die Aussage eines trockenen mathematischen Theorems hinaus.

Betrachtet man einen Sonnenblumenboden während seiner Wachstumsphase (vgl. Figur 3 und 5), so scheint es sich bei der Ursprungsspirale tatsächlich um eine archimedische zu handeln. Man kann hier deutlich erkennen, dass die Grösse der einzelnen Samenkapseln von innen nach aussen kontinuierlich zunimmt, während in Figur 6, welche einen ausgewachsenen, reifen Blütenboden zeigt, die Grösse der Kapseln überall etwa gleich zu sein scheint. Dies spricht für eine  $\sqrt{n}$  - Spirale, wobei zu bemerken ist, dass sich nach dem Ende der Wachstumsphase der Blütenboden nach aussen wölbt, damit alle Samenkapseln dieselbe Grösse erreichen können. Für die Simulation eines ausgewachsenen Blütenbodens in der Ebene allerdings eignet sich die  $\sqrt{n}$  -Spirale gut

(vgl. Figur 7). Es wäre wohl sehr interessant zu wissen, welche Art von Spiralen hier die Natur bevorzugt; aber schlussendlich müssen wir ob der Vielfältigkeit der Natur kapitulieren und uns mit der Möglichkeit, recht gute Modelle zu kreieren, zufrieden geben.

Figur 5



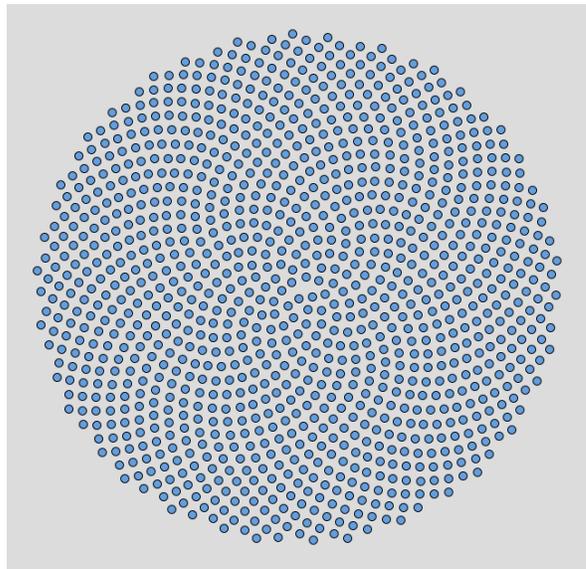
Blütenboden im Wachstum

Figur 6



Blütenboden ausgewachsen

Figur 7

Computersimulation eines ausgewachsenen  
Blütenbodens

Die Gebrüder Bravais, welche zu den Pionieren der Phyllotaxis zählen, erklärten im Gegensatz zu Schimper und Braun, dass die Divergenzwinkel in der Natur irrational seien. Sie begründeten diese Annahme mit der Beobachtung von weiteren Divergenzwinkeln, welche alle sozusagen Abkömmlinge des Goldenen Schnitts sind.

Diese Winkel sind:

$$\begin{aligned} 360 / \tau + 1 &= 137.5078^\circ\dots \\ 360 / \tau + 2 &= 99.5016^\circ\dots \\ 360 / \tau + 3 &= 77.9552^\circ\dots \\ 360 / \rho^2 + 2 &= 151.135^\circ\dots \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339\dots \quad \rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180229\dots$$

Die Divergenzwinkel der Gruppe  $360 / \tau + n = \delta$ , welche bis  $n = 3$  in der Natur beobachtet werden führen ausser zur Fibonaccifolge zu weiteren rekursiven Folgen, deren erstes Glied jeweils die eins ist. Von der Fibonaccifolge abweichende rekursive Folgen werden hier allgemein als Lucasfolgen bezeichnet.

Tabelle 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	Divergenz	Divergenzwinkel
Fibonaccifolge	0	1	1	2	3	5	8	13	0.618034	222.49224
	1	1	2	3	5	8	13	21	0.381966	137.50776
spez. Lucasfolge	2	1	3	4	7	11	18	29	0.276393	99.50148
	3	1	4	5	9	14	23	37	0.216542	77.95512
	4	1	5	6	11	17	28	45	0.177998	64.07928
	5	1	6	7	13	20	33	53	0.151102	54.39672
	6	1	7	8	15	23	38	61	0.131267	47.25612
	7	1	8	9	17	26	43	69	0.116036	41.77296
	8	1	9	10	19	29	48	77	0.103971	37.42956
	9	1	1	11	21	32	53	85	0.094179	33.90444
	10	1	11	12	23	35	58	93	0.086073	30.98628
	11	1	12	13	25	38	63	101	0.079251	28.53036
	12	1	13	14	27	41	68	109	0.073432	26.43552

 weitere rekursive Folgen, hier allg. Lucasfolgen

 Fibonaccifolge mit  $F_0 = 0; F_1 = 1$

 spez. Lucasfolge, auch Lamée-Folge

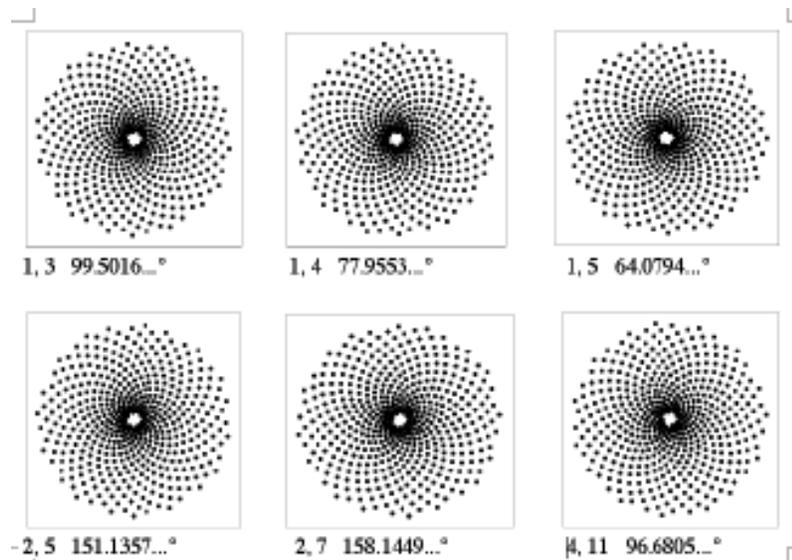
 Fibonaccifolge

In dieser Tabelle wird auch  $F_n$ , resp.  $L_n$  angegeben. Für gewisse mathematische Operationen ist diese Nummerierung nötig, im Zusammenhang der Folgen mit der Phyllotaxis aber nicht von Be-

deutung. An zweiter Stelle der Tabelle erkennt man die neben der Fibonaccifolge berühmteste rekursive Folge  $1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$ . In der Literatur wird sie die spezielle Lucasfolge „abnormale“ oder Lamé'sche Folge genannt. Für alle rekursiven Folgen der Art  $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$  soll hier der Name Lucasfolgen nach dem französischen Mathematiker Edouard Lucas verwendet werden. Nun ist es eine Tatsache, auf welche eben E. Lucas hinwies, dass die Quotienten benachbarter Glieder beliebiger Lucasfolgen nach  $\tau$  resp.  $\rho$  divergieren. H. Baravalle [BH] nennt dies so: „Man nehme zwei beliebige natürliche Zahlen, addiere sie und fahre fort, wie von der Fibonaccifolge bekannt. Man wird stets zum Goldenen Schnitt kommen...“

Daraus folgt, dass jede beliebige Lucasfolge zu einer Divergenz resp. zu einem Divergenzwinkel führt, welcher ein Parastichenbild ergibt, aus welchem wiederum die Lucasfolge zu erkennen ist. In der Botanik hat man eine ganze Reihe solcher Divergenzen erkannt, doch muss man sehen, dass die überwältigende Mehrheit der Divergenzen auf der Fibonaccifolge und deren Verzehrfaltungen beruhen. C. Marzec und J. Kappraff [MK] geben eine Serie solcher Divergenzen, mitsamt der Bestimmungsformel und dem Kettenbruch an (vgl. Tabelle 2). Es ist allerdings nicht genau definiert, ob alle diese Lucasfolgen in der Natur vorkommen oder ob es sich um theoretische Beispiele handelt. Die Gebrüder Bravais haben bei *Dispacus sylvestris* oder der „wilden Karde“ neben Fibonacci- und deren vermehrfachten Folgen auch die Folgen  $1, 3; 1, 4; 1, 5; 2, 5; 2, 7; 4, 11$  gefunden. Bei Tannzapfen kann nicht selten die Folge  $1, 3$  und bei Kakteen können ebenfalls neben der Fibonaccifolge andere, zum Teil exotische Folgen festgestellt werden. Gerade die Kakteen dürften in dieser Hinsicht noch einiges bieten und wäre die Mühe wert, in einer reichhaltigen Kakteensammlung auf die Suche zu gehen.

Figur 3



Figur 3 zeigt die „Idealmodelle“ der von den Gebrüdern Bravais bei der „wilden Karde“ gefundenen Lucasfolgen. Auf den ersten Blick gleichen sich die Parastichenbilder sehr und unterscheiden sich scheinbar nur durch den Spin der sich gleichenden Parastichen. Zählt man jedoch die Pa-

rastischen, so entspricht deren Anzahl jeweils den Gliedern der entsprechenden Lucasfolge. Man kann an diesem Beispiel gut erkennen, dass eine optimale Verteilung der einzelnen Punkte auch bei einer „indirekten“ Einwirkung des Goldenen Schnitts zustande kommt.

11983 veröffentlichten C. Marzec und J. Kappraff [MK] eine Tabelle zur Berechnung von Divergenzen, resp. Divergenzwinkeln (vgl. Tabelle 2). Diese Formeln bestehen aus Brüchen, deren Nenner jeweils aus der Summe der beiden ersten Glieder der betreffenden Lucasfolge und deren Zähler sich aus der Berechnung des Kettenbruchs der Divergenz ergibt.

Tabelle 2. Marzec und Kappraff (aus Journal of Theoretical Biology, 1983, S.214

*The first 19  $\Phi_G$ , their continued fraction representation, and their  $\Phi$  representation.*

Degrees	$\Phi$	Continued fractions	Degrees	$\Phi$	Continued fractions
167·356	$\frac{1+6\tau}{2+13\tau}$	$[0; 2, 6, \bar{1}]$	106·447	$\frac{1+2\tau}{3+7\tau}$	$[0; 3, 2, \bar{1}]$
165·289	$\frac{1+5\tau}{2+11\tau}$	$[0; 2, 5, \bar{1}]$	99·501	$\frac{\tau}{1+3\tau}$	$[0; 3, \bar{1}]$
162·415	$\frac{1+4\tau}{2+9\tau}$	$[0; 2, 4, \bar{1}]$	96·680	$\frac{1+3\tau}{4+11\tau}$	$[0; 3, 1, 2, \bar{1}]$
158·145	$\frac{1+3\tau}{2+7\tau}$	$[0; 2, 3, \bar{1}]$	82·155	$\frac{1+2\tau}{4+9\tau}$	$[0; 4, 2, \bar{1}]$
151·135	$\frac{1+2\tau}{2+5\tau}$	$[0; 2, 2, \bar{1}]$	77·955	$\frac{\tau}{1+4\tau}$	$[0; 4, \bar{1}]$
148·771	$\frac{2+5\tau}{5+12\tau}$	$[0; 2, 2, 2, \bar{1}]$	66·890	$\frac{1+2\tau}{5+11\tau}$	$[0; 5, 2, \bar{1}]$
137·507	$\frac{\tau}{1+2\tau}$	$[0; 2, \bar{1}]$	64·079	$\frac{\tau}{1+5\tau}$	$[0; 5, \bar{1}]$
132·177	$\frac{1+3\tau}{3+8\tau}$	$[0; 2, 1, 2, \bar{1}]$	54·396	$\frac{\tau}{1+6\tau}$	$[0; 6, \bar{1}]$
129·336	$\frac{1+4\tau}{3+11\tau}$	$[0; 2, 1, 3, \bar{1}]$	47·256	$\frac{\tau}{1+7\tau}$	$[0; 7, \bar{1}]$
109·877	$\frac{1+3\tau}{3+10\tau}$	$[0; 3, 3, \bar{1}]$			

Die Formel zur Berechnung der Divergenz von Marzec und Kappraff weist darauf hin, dass die Lucasfolgen sich in Gruppen zusammenfassen lassen, wobei der Zähler der Formel eine sogenannte Differenzfolge dieser Gruppe charakterisiert. Davon mehr im Aufsatz über die *Systematik der Lucasfolgen* (erscheint demnächst auf dieser Website). Die ebenfalls in der Tabelle von Marzec und Kappraff angegebenen Kettenbrüche der Divergenzen bieten eine reizvolle Möglich-

keit, aus der an der Pflanze festgestellten Lucasfolge die Divergenz und den Divergenzwinkel zu berechnen und das Parastichendiagramm mit dem Computer aufzuzeichnen. Dazu ist zu bemerken, dass die übergestrichene Eins im Kettenbruch eine unendliche Folge von Einsen bedeutet, d. h. eigentlich nichts anderes als  $\tau$ . Den Kettenbruch berechnet man, indem man aus den am Objekt erkannten aufeinanderfolgenden Lucaszahlen durch Subtraktion  $L_2 - L_1$  ermittelt. Nun dividiert man  $L_1 / L_2$ , notiert sich vom Quotienten die natürliche Zahl vor dem Komma. Nun subtrahiert man die Zahl vor dem Komma und nimmt vom Rest den reziproken Wert. So verfährt man weiter, bis kein Rest mehr übrig bleibt. Nun kann man den Kettenbruch aufstellen, indem zuhinterst die übergestrichene Eins und danach von hinten nach vorne die natürlichen Zahlen als Kettenbruchglieder in der ermittelten Reihenfolge einsetzt. Als Beispiel diene hier die Lucasfolge 3, 7, 10, 17, ...

$$\frac{3}{7} = 0.42857\dots; \text{ also } 0; \frac{1}{0.42847\dots} = 2.333\dots; \text{ also } 2; 2.333\dots - 2 = 0.333\dots; \frac{1}{0.333\dots} = 3 \text{ also } 3; \text{ Ende}$$

$$\delta = [0; 3, 2, \bar{1}]$$

Die Divergenz berechnet man nun aus dem Kettenbruch ebenfalls direkt wie folgt:

$$\frac{1}{1.6180339\dots} = 0.6180339\dots; 0.6180339\dots + 2 = 2.6180339\dots,$$

$$\frac{1}{2.6180339\dots} = 0.381966\dots; 0.381966 + 3 = 3.381966\dots; \frac{1}{3.381966\dots} = 0.295686\dots;$$

$$\text{Divergenzwinkel} = 360 \times 0.295686\dots = 106.447\dots^\circ$$

Sowohl die Methode von Marzec und Kappraff, sowie die eben gezeigte führen zu Divergenzen resp. Divergenzwinkeln mit irrationalen Werten, weil mit der Zahl  $\tau$  operiert wurde. Damit werden für die Divergenzwinkel „Idealwerte“ erreicht, welche mathematisch zwar klar definiert sind, in der Natur aber wahrscheinlich nicht vorkommen oder zumindest nicht nachweisbar sind. In der Regel wird von dem Winkel von  $137.5^\circ$  ausgegangen, d. h. also vom gerundeten Divergenzwinkel der rekursiven Folge 1, 2, 3, 5, 8, ..., deren Kettenbruch für die Divergenz  $[0; 2, \bar{1}]$  lautet.

Dass dabei von der Fibonaccifolge geredet wird, ist nicht ganz richtig, denn die Fibonaccifolge beginnt mit zwei Einsen. Der Kettenbruch lautet  $[0; \bar{1}]$  und ergibt als Divergenz  $0.6180339\dots$ , also  $\tau - 1 = \rho$ , was einen Divergenzwinkel von  $222.4922^\circ$  ausmacht. Dieser Winkel ergibt dasselbe Parastichenbild wie derjenige der Folge 1, 2, 3, ...; nur mit umgekehrtem Spin. Bei den Pflanzen, insbesondere bei den Kakteen kommen beide Spins vor. Hier spätestens muss bemerkt werden, dass sich die Phyllotaxis in vielen Pflanzen nicht in einer theoretischen Ebene wie bei der Sonnenblume, sondern räumlich manifestiert. So bei den Kakteen, der Ananas und vielen andern Arten.

Zur alten Kontroverse, ob die Divergenzen irrational oder rational seien, kann ein Vermittlungsvorschlag gemacht werden, indem man davon ausgeht, dass die Vegetationspunkte sich genau so verhalten wie die Fibonaccifolge oder die vorkommenden Nebenfolgen. Nehmen wir dazu die Folge 1, 2, 3, 5, 8, ... und entwickeln von den beiden ersten Gliedern den Kettenbruch der Divergenz, also  $\delta = [0; 2] = 0.5$ , so ergibt dies mit  $0.5 \times 360^\circ$  für den ersten Divergenzwinkel  $180^\circ$ . Da-

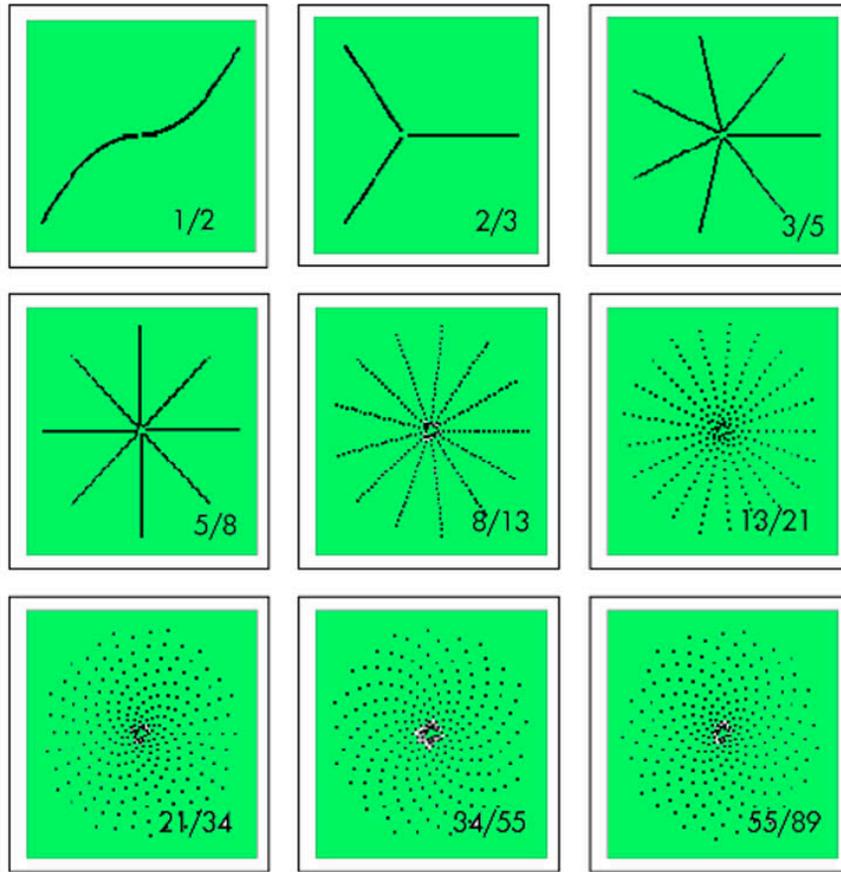
selbe tun wir mit allen folgen Gliederpaaren 2,3; 3,5 usw. Wir werden bemerken, dass mit jedem weiteren Gliederpaar eine 1 im Kettenbruch dazukommt. Die folgenden Tabelle zeigt Diese Entwicklung:

Tabelle 3

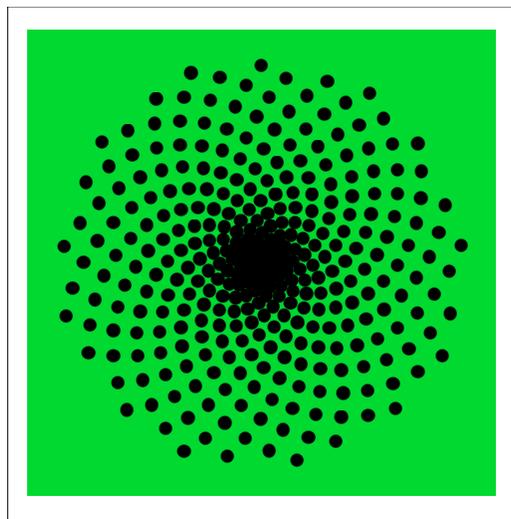
		Kettenbruch	Divergenz	Divergenzwinkel
1	2	0;2	0.5	180
2	3	0;2,1	0.333...	120
3	5	0;2,1,1	0.4	144
5	8	0;2,1,1,1	0.375	135
8	13	0;2,1,1,1,1	0.38461538...	138.4615385...
13	21	0;2,1,1,1,1,1,	0.38095230...	137.6470588...
21	34	0;2,1,1,1,1,1,1,	0.38235290...	137.1428571...
34	55	0;2,1,1,1,1,1,1,1,	0.38181818...	137.4545455...
55	89	0;2,1,1,1,1,1,1,1,1,	0.38202240...	137.5280600...
Idealwert		0;2,1...	0.38196590...	137.5077240...

Was auch immer die Ursache für die von der Natur gewählten oder ersonnenen Divergenzwinkel sei, sicher ist ihre auffallende Nähe und Abhängigkeit zum goldenen Schnitt. Es wurde auch schon die Frage aufgestellt, ob die Pflanzen zählen können? Sicherlich nicht im Sinn des Zählens in der Mathematik. Da liegt doch die Konkurrenztheorie viel näher. A. Beutelspacher [BA] bezeichnet in seinem Buch „Der Goldene Schnitt“  $\tau$  und  $\rho$  als am schlechtesten mit ganzen Zahlen approximierbare Zahlen überhaupt. Dadurch, dass die Pflanzen in der Phyllotaxis diesen Zahlen sehr nahe kommen, ergibt sich, dass jeder neue Trieb in der Vielzahl seiner Vorgänger eine kleine Lücke findet, welche ihm Licht und Nahrung verschafft. Insofern haben also Konkurrenz und goldener Schnitt hier etwas miteinander zu tun, denn *der Goldene Schnitt ermöglicht es, die Konkurrenz erträglich zu gestalten* und damit die Lebensumstände der Pflanze zu optimieren. In einem „Brief aus dem botanischen Garten Zürich“ schreibt Rolf Rutishauser [RR] :“Warum bei vielen nicht näher miteinander verwandten Pflanzen näherungsweise der Fibonacciwinkel von  $137.5^\circ$  auftritt, ist jedoch nicht eindeutig geklärt“. Dies dürfte sich bis heute nicht sehr geändert haben. Abschliessend seien noch die Parastichendiagramme der in Tabelle 3 aufgeführten Divergenzwinkel vergleichsweise gezeigt (vgl. Figur 4). Figur 5 zeigt das Diagramm mit dem Idealwinkel von  $137.507734^\circ$ ...

Figur 4



Figur 5



Divergenz 0.38196.....

Man sieht, dass bei den ersten Kombinationen nichts Besonderes herauskommt. Bei  $13/21$  aber kann man in der Mitte bereits die beginnenden Parastichen erkennen. Je höher wir gehen, desto besser wird die Annäherung an die Idealfigur. Aber schon bei  $55/89$  fällt der Unterschied nicht mehr ins Gewicht und könnte in natura an der Pflanze wohl nur sehr schwer definiert werden. Interessant ist auch, dass die Diagramme  $13/21$  und  $21/34$  grosse Aehnlichkeit mit gewissen Kakteen haben, welche ebenfalls diese annähernd senkrecht zum Pool verlaufenden Rippen aufweisen (vgl. Figur 6). Die Zahl der Rippen allerdings kann unterschiedlich sein. Die Phyllotaxis der Kakteen wird noch selten behandelt und bedarf sicher einer vermehrten Beachtung.

Figur 6



echinocactus leninghausi

## Literaturhinweise

- [BH] Baravalle von, Hermann, „Die Geometrie des Pentagramms...“, Stuttgart, 1985
- [MK] Marcek C., Kappraff J., „Properties of Maximal Spacing on an Circle...“Journal of Theoretical Biology, London, 1983
- [BA] Beutelspacher, Albrecht, „Der goldene Schnitt“, Mannheim, 1988
- [RH] Reis, Helmut, „Der Goldene Schnitt und seine Bedeutung für die Harmonik“, Bonn, 1990, S. 117 ff.
- [RR] Rutishauser, Rolf, „Briefe aus dem botanischen Garten Zürich“, Zürich April 1995