Alfred Hoehn und Hans Walser

Gittergeometrie und pythagoreische Dreiecke

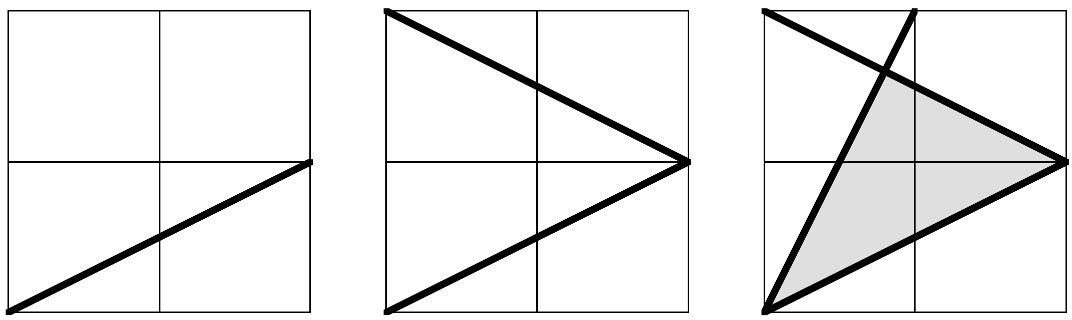
Dieser Artikel wurde von der *Praxis der Mathematik* zur Publikation angenommen und erscheint demnächst.

Kurzfassung

Werden in einem Quadrat die Ecken mit nichtanliegenden Seitenmitten verbunden, entsteht ein Achteckstern, der als Teilfigur das pythagoreische Dreieck mit dem Seitenverhältnis 3:4:5 enthält. Eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion im Quadratgitter gibt einen Zugang zu sämtlichen pythagoreischen Dreiecken. Das Verfahren läßt sich auch auf das regelmäßige Dreiecksgitter übertragen. Die dabei entstehenden Figuren können zu vier- und sechsteiligen Sternfiguren ergänzt werden.

1 Worum geht es?

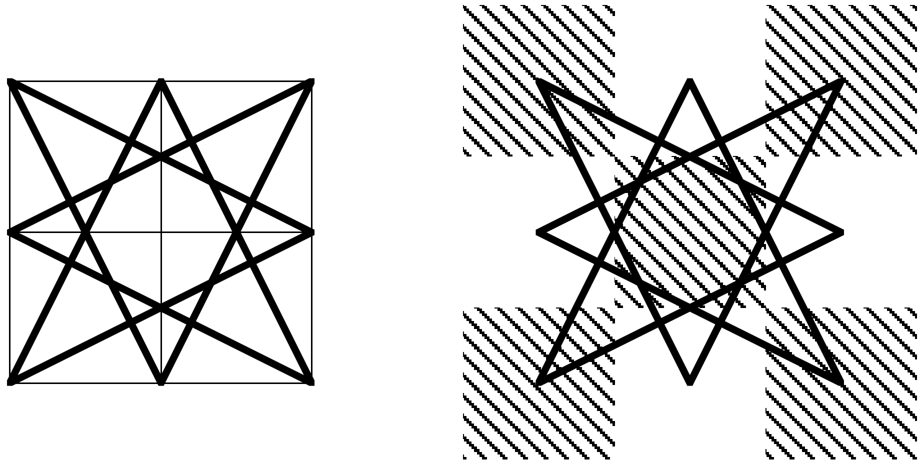
Wenn wir in einem Quadrat die Mittelparallelen einzeichnen und dann weiter wie in Figur 1 a) bis c) verfahren, entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem ganzzahligen Seitenverhältnis 3:4:5. Ein rechtwinkliges Dreieck mit einem ganzzahligen Seitenverhältnis wird als *pythagoreisches Dreieck* bezeichnet.



a) b) c)

Fig. 1: Konstruktion des pythagoreischen Dreiecks

Werden die Zeichenschritte weitergeführt, entsteht ein achteckiger Stern (Fig. 2a), der auch als achtseitiger Rösselsprung auf einem Schachbrett interpretiert werden kann (Fig. 2b). Die Figur 2a wird als *Knauthsche Figur* bezeichnet (vgl. [6, S. 228f]). Teile dieser Figur sind bereits beim römischen Architekten *Vitruv* (Vitruvius, 1. Jh. v. Chr.) erwähnt (vgl. [5]).



a) b)

Fig. 2: Sternfigur

Die Zeichenmethode der Figur 1 kann nun so verallgemeinert werden, dass jedes beliebige pythagoreische Dreieck darstellbar ist.

2 Pythagoreische Dreiecke

Pythagoreische Dreiecke, das heißt rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, und die zugehörigen pythagoreischen Zahlentripel ($a,b,c \in \mathrm{N}, a^2 + b^2 = c^2$) werden meist unter zahlentheoretischen Aspekten behandelt, wobei insbesondere Fragen der Teilbarkeit eine Rolle spielen. [2] und [3] geben eine breite Einführung in diesen Themenkreis unter didaktischen Gesichtspunkten sowie eine reiche Bibliographie.

Zur zahlentheoretischen Konstruktion eines pythagoreischen Zahlentripel gilt folgender Satz: Ein Tripel (a,b,c) aus natürlichen Zahlen a,b,c mit geradem b ist genau dann ein primitives, das heißt teilerfremdes pythagoreisches Zahlentripel, wenn es teilerfremde natürliche Zahlen m und n mit $m > n$ und ungerader Differenz $m - n$ gibt, so dass gilt: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ (vgl. [1]).

Wir werden sehen, dass die beiden Parameter m und n in unserem geometrischen Verfahren zur Konstruktion eines pythagoreischen Dreieckes nicht nur eine zahlentheoretische, sondern auch eine direkte geometrische Rolle spielen.

3 Die Verallgemeinerung

Die Figur 3 zeigt exemplarisch für den Fall $(m,n) = (4,1)$ das konstrukive Vorgehen im allgemeinen Fall. Wir zeigen nun, dass das Dreieck ABC genau das ganzzahlige Seitenverhältnis $a{:}b{:}c$ aufweist, das zum Parameterpaar (m,n) gemäß obigem zahlentheoretischen Satz gehört.

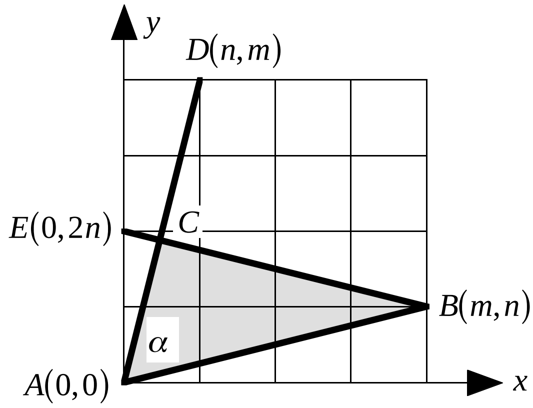


Fig. 3: Der allgemeine Fall

Die beiden Vektoren $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -m \\ n \end{pmatrix}$ sind orthogonal; das Dreieck ABC hat also bei C einen rechten Winkel. Zur Berechnung des Winkels α finden wir als Zwischenwinkel der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ den Wert $\cos\alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ und daraus $\sin\alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$. Damit besteht im rechtwinkligen Dreieck ABC das Seitenverhältnis $a:b:c = \left(m^2 - n^2\right):(2mn):\left(m^2 + n^2\right)$. Wir haben also ein pythagoreisches Dreieck.

Beim Vorgehen gemäß Figur 3 erhalten wir jeweils ein pythagoreisches Dreieck, welches „schief“ im Quadratgitter liegt. Wir können natürlich auch umgekehrt vorgehen, indem wir mit einem pythagoreischen Dreieck beginnen und dieses so ins Quadratgitter legen, dass die Katheten auf Gitterlinien zu liegen kommen. Die sich daraus ergebenden geometrischen Folgerungen werden in [7] vorgestellt.

Die Figur 4 zeigt, dass auch dieser allgemeine Fall zu einer Sternfigur ergänzt werden kann.

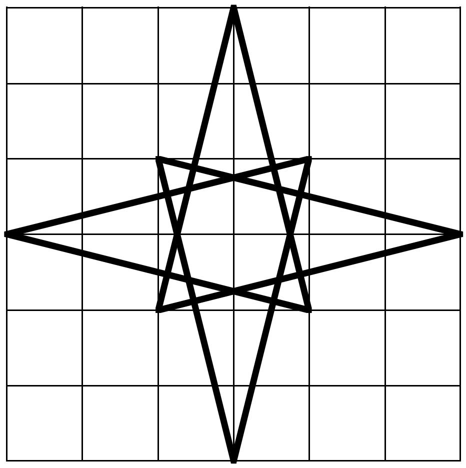


Fig. 4: Allgemeine Sternfigur

4 Inkreis und Ankreise

Aus der Figur 5 ist ersichtlich, dass die Winkelhalbiernde des Winkels α eine Diagonale des Quadratgitters ist und die Winkelhalbierende des Winkels β eine Gitterlinie. Daraus folgt, dass deren Schnittpunkt, also der Inkreismittelpunkt, ein Gitterpunkt ist. Analog kann gezeigt werden, dass auch die Mittelpunkte der drei Ankreise Gitterpunkte sind.

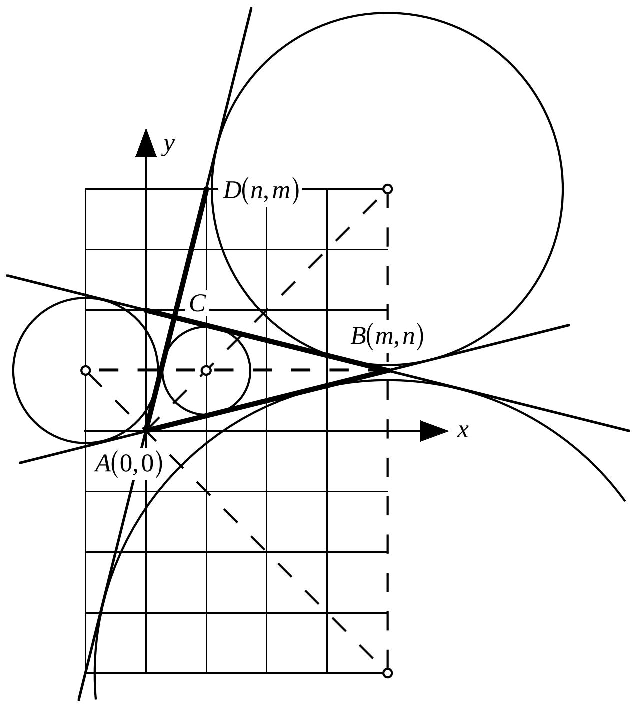


Fig. 5: In- und Ankreismittelpunkte sind Gitterpunkte

5 Im regelmäßigen Dreiecksgitter

Im regelmäßigen Dreiecksgitter zeichnen wir ein Sechseck der Seitenlänge 2 und führen darin die Konstruktion gemäß Figur 6 durch.

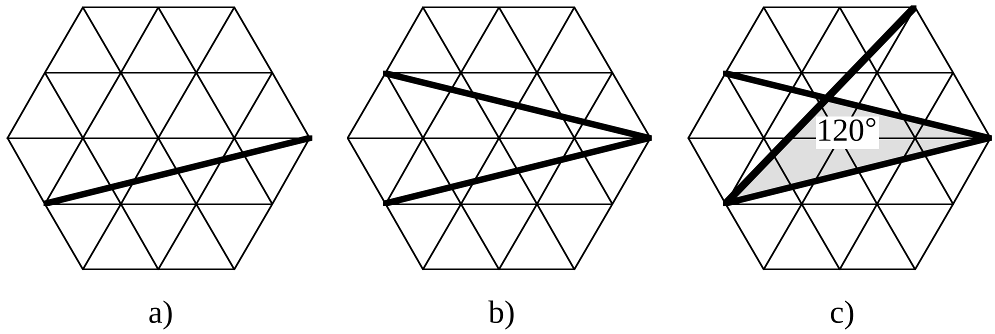


Fig. 6: Konstruktion im Sechseck

Dadurch entsteht ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel von 120° und dem ganzzahligen Seitenverhältnis 8:7:13. In Analogie zu den pythagoreischen Dreiecken bezeichnen wir ein stumpfwinkliges Dreieck *ABC* mit $\gamma = 120°$ und einem ganzzahligen, aber teilerfremden Seitenverhältnis $a{:}b{:}c$ als ein *primitives pythagoreisches 120°-Dreieck*. Nach [1; S. 504] und [4] können diese Dreiecke wie folgt parametrisiert werden: Zu teilerfremden $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, $m - n \neq 3k$, $(k \in \mathbb{N})$ setzen wir $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn + n^2$, $c = m^2 + n^2 + mn$. Für $(m,n) = (3,1)$ ergibt sich das Beispiel $a = 8$, $b = 7$, $c = 13$ (Fig. 7).

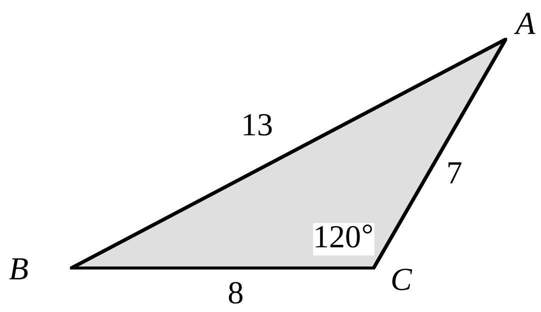


Fig. 7: Pythagoreisches 120°-Dreieck

Weiterzeichnen der Figur 6 führt zum sechsteiligen Stern der Figur 8.

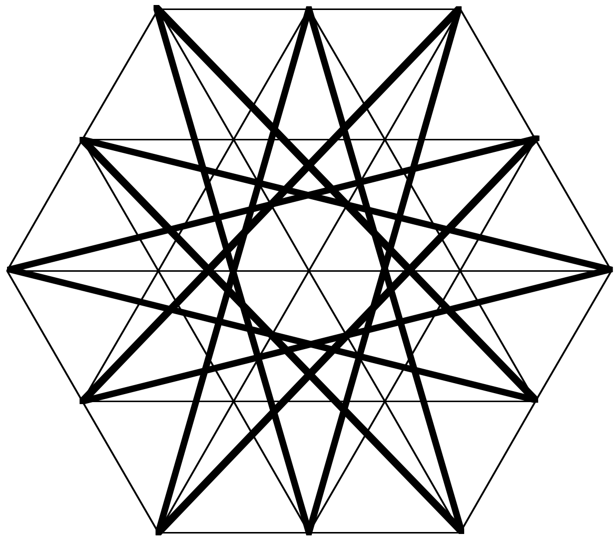


Fig. 8: Sechsteiliger Stern

Die Konstruktion der Figur 6 kann auf beliebige teilerfremde Parameterpaare (m,n) verallgemeinert werden. Die Figur 9 zeigt exemplarisch für den allgemeinen Fall die Situation für $(m,n)=(5,3)$.

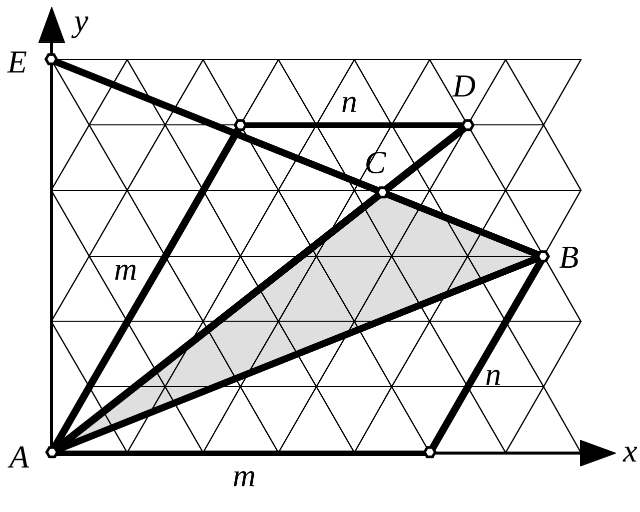


Fig. 9: Beweisfigur für den allgemeinen Fall

Um zu zeigen, dass das Dreieck *ABC* ein pythagoreisches Dreieck ist, arbeiten wir wiederum mit Winkeln. Zunächst erhalten wir für die beiden Vektoren $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix} n+\frac{m}{2} \\ \frac{m}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und

$\overrightarrow{BE} = \begin{pmatrix} -m - \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ den Zwischenwinkel $\gamma = 120°$. Für den Winkel α ergibt sich als Zwischenwinkel der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} m + \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} n + \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ der Wert $\cos\alpha = \dfrac{\frac{m^2}{2} + 2mn + \frac{n^2}{2}}{m^2 + mn + n^2}$. Dieselben Winkel erhalten wir aber auch für das Dreieck mit den Seiten $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn + n^2$, $c = m^2 + n^2 + mn$. Somit haben wir ein pythagoreisches 120°-Dreieck.

Analog zum Vorgehen im Quadratgitter kann gezeigt werden, dass die Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise entweder Gitterpunkte oder Mittelpunkte von Gitterdreiecken sind.

Auch die Figur 9 kann zu einer sechsteiligen Sternfigur ergänzt werden (Fig. 10).

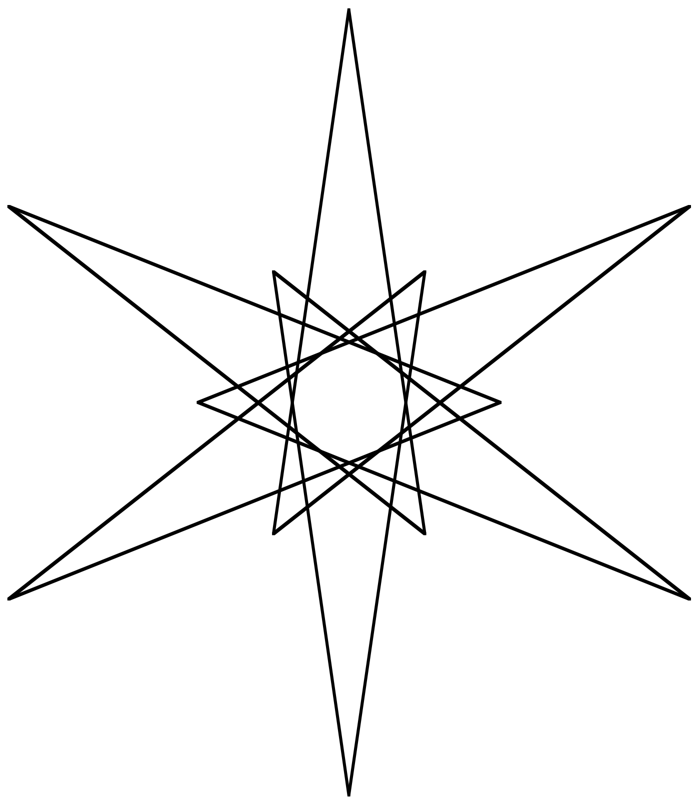


Fig. 10: Allgemeine sechsteilige Sternfigur

Literatur

[1] *Dickson, L. E.*: History of the Theory of Numbers, II. Diophantine Analysis. Washington: Carnegie Institution 1920.

[2] *Fraedrich, Anna Maria*: Pythagoreische Zahlentripel: Unterrichtliche Zugänge, Konstruktionsverfahren, sich anschließende Probleme und weiterführende Fragestellungen. *Didaktik der Mathematik* 13, 1985, S. 31 - 49 und *Didaktik der Mathematik* 13, 1985, S. 98 - 117.

[3] *Fraedrich, Anna Maria*: Die Satzgruppe des Pythagoras. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag 1995.

[4] *Hasse, H.*: Ein Analogon zu den ganzzahligen pythagoräischen Dreiecken. Elemente der Mathematik 32, 1977, S. 1 - 6.

[5] *Kayser, Hans*: Im Anfang war der Klang. Nachdruck vergriffener Texte von Hans Kayser, Rudolf Haase, André M. Studer. Herausgeber: Kreis der Freunde um Hans Kayser. Schriften über Harmonik Nr. 16. Bern 1986.

[6] *von Naredi, Paul*: Architektur und Harmonie. Köln: Du Mont 1989.

[7] *Walser, Hans*: Pythagoreische Dreiecke in der Gittergeometrie. Didaktik der Mathematik 23, 1995, S. 193 - 205.

Anschriften der Verfasser:

Alfred Hoehn, Jurastrasse 59, CH - 4053 Basel. alfredhoehn@balcab.ch

Dr. Hans Walser, Gerlikonerstrasse 29, CH - 8500 Frauenfeld. hwalser@bluewin.ch