

Aufsatz über die Verschachtelung der regulären Polieder

Version: 18.01.2012

BABUSCHKA

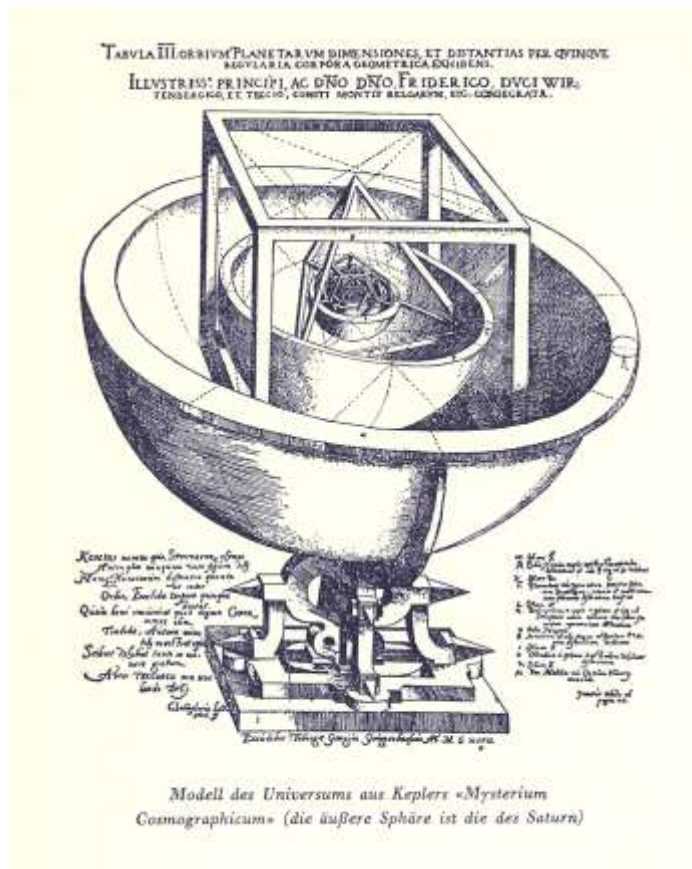
Johannes Kepler hat in seinem Frühwerk "Mysterium cosmographicum" in mühevoller Art versucht, die sogenannten Planetensphären mittels der fünf platonischen Körper darzustellen, wobei jeweils die Umkugel des Inneren gleichzeitig die Inkugel des nächst Aeusseren darstellt. J. Kepler war sicher bekannt, dass sich auf diese Weise jedes Polieder in das andere einschreiben lässt oder jedes andere umschreiben kann. So hat er in den Wintermonaten 1595/96 alle möglichen Permutationen ($1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$) durchgerechnet. Allerdings konnte er an vielen Fällen sofort erkennen, dass sie als Modell für die Planetensphären nicht in Frage kamen.



Bei den Berechnungen hielt er sich an die von N. Kopernikus postulierte Planetenbahnen, denn er war, und diese Tatsache wird von Kepler's Kritikern geflissentlich übersehen, ein glühender Anhänger des kopernikanischen Weltsystems.

Schon am 9. Juli 1595 kam er während einer Vorlesung auf die seltsame Idee, die Sphären der damals fünf bekannten Planeten in Beziehung zu den fünf platonischen Körpern zu setzen. Dabei ging er von der Erdsphäre aus, welche er als Mass für alle andern Bahnen annahm und umschrieb ihr das Zwölfflach, das Dodekaeder, dessen Inkugel die Erdbahn und dessen Umkugel die Marsbahn darstellt. Der Letzteren umschrieb er ein Tetraeder, dessen Umkugel die Jupiterbahn sei und schliesslich liess er die Tetraederumkugel von einem Würfel umschreiben, dessen Umkugel die Bahn des damals äussersten Planeten Saturn darstellt. Von der Erde sonnenwärts legte J. Kepler in die Inkugel des Dodekaeders ein Ikosaeder, auf dessen Inkugel die Venus kreist und zuletzt setzte er in die Inkugel des Ikosaeders ein Oktaeder, auf dessen Inkugel der sonnennächste Planet Merkur seine Bahnen zieht. Die in Figur 2 dargestellte perspektivische Ansicht dieses Kepler'schen Sphärensystems zeigt die ineinandergeschachtelten Polieder, wobei allerdings die inneren Körper grösser gezeichnet sind, damit man sie in der an sich schon kleinen Figur auch noch erkennen kann.

Figur 2



Von seinen monatelangen Berechnungen völlig erschöpft unternahm J. Kepler im Frühjahr 1596 eine Reise in seine eigentliche Heimat Württemberg, natürlich mit dem Erstling im Gepäck. Sein ehemaliger Lehrer Michael Mästlin beriet ihn mit väterlicher Bedächtigkeit und machte ihn auf manche Unzulänglichkeit im Manuskript aufmerksam. Mästlin erkannte aber auch sogleich die Grossartigkeit

und Kühnheit der Kepler'schen Spährentheorie und setzte sich in der Folge beispiellos für die Veröffentlichung des Manuskripts ein.

Dieser erste Versuch J. Kepler's, eine Lösung für den Aufbau des Planetensystems zu finden, wird heute als gescheitert betrachtet. Dabei wird hauptsächlich mit dem Argument operiert, dass die Anzahl der Planeten inzwischen durch Entdeckung von Uranus, Neptun und Pluto¹ auf neun gestiegen ist und dass die Planetoiden und Trümmerstücke zwischen Mars und Jupiter auf die frühere Existenz eines weiteren Planeten hinweisen.

Kepler selbst mögen Zweifel an seiner Theorie gekommen sein, denn die Abweichungen seiner Berechnungen gegenüber den damals beobachteten Planetenbahnen waren nicht zu übersehen. Insbesondere die minutiösen Messungen seines späteren Arbeitsgebers Tycho Brahe haben Kepler's Zweifel bestätigt. Und doch sind in seinem Erstlingswerk, welches mit neuzeitlicher Terminologie als ein Gesamtkunstwerk bezeichnet werden könnte, bereits die Gedanken verborgen, welche Kepler später als Leitfaden für die Auffindung der Gesetze über die Planetenbewegungen dienten. Diese Gesetze, welche noch heute in etwas erweiterter Form einen Grundstein der Astronomie darstellen, wären wohl niemals ohne die Ungestümheit, die Kühnheit und Genialität des "Mysterium cosmographicum" entdeckt worden.

Rudolf Steiner bezeichnete in seiner Vortragsreihe "Der Orient im Lichte des Okzidents" Kepler als "diejenige Individualität in unserer Kulturepoche, die einstmals in den Geheimstätten Aegyptens den Seelenblick hinaufgelenkt hatte zu den Sternen und ihre Geheimnisse im Weltenraum in der damaligen Art zu ergründen suchte..." Aufgrund Kepler's eindrucklichen Aeusserungen über die zwei Theoreme: "Satz des Pythagoras" und "goldener Schnitt"spannt E. Bindel den Bogen Kepler's früherer Inkarnationen über den Umkreis des Pythagoras bis zum Prinzen und Wesiren Hem On, dem mutmasslichen Erbauer der Cheopspyramide. Kepler selbst drückt sich, wie R. Steiner auch feststellt "sehr radikal aus", indem er sagt, er habe die Gefässe der alten Aegypter geraubt, um sie hereinzutragen in die neuere Zeit.

Betrachtet man Kepler's ewiges Geistwesen aus diesem Blickwinkel, so versteht man auch seine völlig neutrale Haltung gegenüber den zwei oben erwähnten Theoremen. Ganz im Gegensatz zu heute, wo sich Harmoniker und Anhänger des goldenen Schnitts in den Haaren liegen. Kepler hat nur festgestellt, dass der goldene Schnitt ohne den Satz des Pythagoras nicht gelten könne, was er damit immer ausdrücken wollte. Falls er damit den Beweis meinte, so irrte er, denn der goldene Schnitt ist auch aus dem gleichseitigen Dreieck mittels dem Sehnensatz beweisbar.

Kepler's Versuch, die Planetenbahnen in ein geometrisches System zu integrieren, zeigt, wie R. Steiner in einer Vortragsreihe erläutert, dass "Kepler eine Ahnung gehabt hat davon, dass er mit seinem Sonnen-Planetensystem in einer gewissen Weise wiederholte, allerdings passend in die 5. nachatlantische Zeit, was gelebt hat als Weltenbild in den alten ägyptischen Priestermythen..." So betrachtet handelt es sich bei Kepler's Weltsystem nicht nur um eine Quantifizierung der Planetenbahnen, sondern auch darum, die Planeten als Qualitäten in ein qualitativ-geometrisches System hinein zu gießen. Diese Absicht ist absolut typisch für den Pythagorismus, welcher in Erweiterung des heute üblichen wissenschaftlichen Bestrebens, eine qualitativ bestehende Tatsache arithmetisch zu quantifizieren, auch die Qualifizierung einer Quantität beinhaltet. Dies ist auch der Punkt, wo sich Kepler's Fantasieprodukt von der "exakten" Wissenschaft unterscheidet, indem es als Kunstwerk inmitten der beiden Pole steht und zu beiden eine Beziehung herstellt.

Bislang haben sich die Harmoniker vor allem als die Widerbeleger des Pythagorismus verstanden, mussten aber auch einsehen, dass diese alleinige Fixierung nicht ganz haltbar ist. Manche Aussagen, welchen den Pythagoreern zugeschrieben worden sind, haben sich platonischer Provenienz erwiesen. Forschungen von J. Stenzel haben u.a. erbracht, dass Platon unter dem Titel "Ueber das Gute" eine systematische Ontologie gelehrt und mit einer Weltordnung verbunden hat. Darin hat er auch die Lehre von den Ideenzahlen entwickelt, welche von Aristoteles scharf kritisiert wurde. Aristoteles, der grosse Schüler des Platon war in Wirklichkeit mit seinem Lehrer niemals so zerstritten, wie die Historiker dies meist darstellen, sondern er musste Platons intuitiv und in Prosaform aufgestellte mathematische Theoreme kritisieren, weil er in die Mathematik dasjenige einbrachte, was ganz allgemein als Axiomatik bezeichnet wird und was den sogenannten mathematischen Beweis überhaupt erst ermöglichte. Nach K. von Fritz hat Aristoteles versucht, den Beweis zu erbringen, dass jede Wissenschaft von ersten, unbeweisbaren, aber nichts destoweniger wahren und gesicherten Prinzipien ausgehen müsse.

Die Harmonik betreffend kann festgestellt werden, dass die Ganzzahligkeit der musikalischen Intervalle nicht mathematisch bewiesen werden kann, ohne das Empfinden des menschlichen Ohres als eigentliche Axiomatik für die Harmonik hinzustellen. Andererseits bedarf aber die Geometrie einer Axiomatik, welche den Verstand und ausserdem ganz offensichtlich das menschliche Auge betrifft. Wie anders, als mit dem Auge und dem Verstand könnte wohl das 2. Axiom Euklid's: "Durch zwei Punkte gibt es nur eine Gerade" wahrgenommen und als richtig befunden werden?

Lange Jahre, nachdem Kepler sein "mysterium cosmographicum" veröffentlicht und in seinem eigentlichen Lebenswerk "harmonices mundi" die im Prinzip heute noch geltenden Gesetze über die Planetenbahnen aufgestellt hatte, mass er den ineinander geschachtelten platonischen Körpern immer noch die Bedeutung einer göttlichen Konzeptskizze zu. Die Genauigkeit spielt bei einer solchen Betrachtungsweise eine untergeordnete Rolle, denn es ist der Leitgedanke, welcher in erhabener Qualität den Tatbestand durchdringt. Es ist auch wenig sinnvoll, ein Kunstwerk, sei es Leonardos Mona

Lisa oder Raphaels platonische Schule, auf Präzision der angewendeten Proportionen zu vermessen, denn man wird dabei höchstens verblüffende Aehnlichkeiten mit der riesigen Palette harmonikaler und harmonischer Proportionen heraustüfteln können. Der wahre Künstler hat solches Messen gar nicht nötig, denn sein Qualitätsempfinden schafft ganz von alleine die messbaren Quantitäten.

Kepler's Idee für die Darstellung der Planetensphären beruht auf der Tatsache, dass alle regulären Polieder Inkugeln umschreiben und von Umkugeln mit gleichem Zentrum umschrieben werden. Die sogenannte Polarität der platonischen Körper erlaubt es aber auch, diese ineinander einzuschreiben, indem man die Schwerpunkte der Flächen durch Gerade verbindet. Der dadurch entstehende Körper wird als dual zum Ausgangskörper bezeichnet. Auf diese Weise entsteht aus dem Tetraeder wiederum ein Tetraeder, nur entsprechend kleiner. Aus dem Würfel entsteht das Oktaeder und umgekehrt und schliesslich besteht zwischen Ikosaeder und Dodekaeder dieselbe Beziehung. Die Dualität beruht auf dem Prinzip, dass die Inkugel des äusseren Körpers gleichzeitig die Umkugel des umschlossenen ist. Das Tetraeder ist demnach dual zu sich selbst, der Würfel ist dual zum Oktaeder und das Ikosaeder dual zum Dodekaeder. In Kepler's Verschachtelung liegt das Ikosaeder im Dodekaeder als Ausdruck dieser Dualität; alle andern In- und Umschreibungen des "mysterium cosmographicum" sind nicht dual.

Im II. Buch seiner "harmonices mundi" beschreibt Kepler unter anderem die fünf platonischen Körper und versäumt es nicht, die einzelnen Polieder mit ihren alten Symbolen zu versehen. Platon und Aristoteles brachten die die fünf Körper mit den "Elementen" Erde, Luft, Wasser und Feuer in Verbindung und erhoben das Pentagondodekaeder zum Symbol des Aethers. Das Hexaeder wird der Erde, das Oktaeder der Luft, das Ikosaeder dem Wasser und schliesslich das Tetraeder dem Feuer zugeschrieben. Dieser Elementbegriff der alten Griechen, welcher in der antiken und mittelalterlichen Alchimie eine herausragende Rolle spielen sollte, hat sich bis in die heutige Zeit erhalten.

Der russische theoretische Physiker Mendelew hat das Kunststück fertig gebracht, die Zahl der Elemente auf deren 92 festzulegen, obwohl zu seiner Zeit nur ca. drei viertel davon explizit nachgewiesen werden konnten. Sein Periodensystem der Elemente zeigte ganz offensichtlich die Lücken, in welche die bis dahin unbekannt Elemente gehörten. Mit den ungeheuren, den modernen Physikern von der Oeffentlichkeit zur Verfügung gestellten Teilchenbeschleunigern, den teuersten Maschinen der Welt haben diese die Zahl der Elemente auf weit über hundert erweitert. Trotz alledem haben diese Bemühungen am Prinzip der alten Begriffe Erde (feste Materie), Luft (gasförmige Materie), Wasser (flüssige Materie) und Feuer (chemische und nukleare Prozesse in der Materie) nichts zu verändern vermocht. Den Aether haben die Physiker spätestens seit Michelson's misslungenem Experiment im Jahr 1881 vergessen oder haben ihn verdrängt, indem sie seine Deutung den Theologen und Philosophen überliessen. Viel später als bei den anderen Naturwissenschaften hat der Positivismus in der Physik Einzug gehalten, gerade aber noch rechtzeitig, um der Relativitätstheorie und schlussendlich der Atombombe Geburtshilfe zu leisten.

Erde, Luft, Wasser und Feuer können in sehr vereinfachter Weise als die Zustandsformen der Materie angesehen werden. Die Erde als deren feste (mineralische), die Luft als deren gasförmige, das Wasser als deren flüssige Form und das Feuer schliesslich ist der Ausdruck für die in der Materie ablaufenden chemischen und nuklearen Prozesse (Molekularbrand, Kernfission und Kernfusion). In der Gestalt des geheimnisvollsten und vielleicht auch schönsten der platonischen Körper, des Pentagonododekaeders wird dasjenige symbolisiert, was alle andern "Elemente" umfasst und durchdringt, der Aether, die geistige Welt.

Kepler hat im "Mysterium cosmographicum" gute Argumente angebracht, um die Wahl der den einzelnen Planeten zugehörigen platonischen Körper zu erklären. Grundsätzlich hatte er aber keine andere Wahl für die Reihenfolge, denn die Radien der Planetenbahnen liessen gar keine andere Zuordnung zu. Von den sämtlichen 120 Möglichkeiten der In- und Umkugelverschachtelungen kam aufgrund der besten Annäherungen an die Planetenbahnen nur diese Eine als Lösung in Frage. In den 120 Permutationen sind auch die sogenannten dualen Beziehungen der platonischen Körper eingegliedert. Dual bedeutet wie schon erläutert, dass der eingeschriebene Körper mit seinen Ecken den umschreibenden in den Schwerpunkten dessen Flächen berührt.

So ist das Tetraeder zu sich selbst polar, Das Hexaeder zum Oktaeder und das Ikosaeder zu Dodekaeder. Nebst all diesen Möglichkeiten gibt es nun noch 10 weitere Ein- oder Umschreibungen, welche mit der Polarität und der In-Umkugelbeziehung nichts zu tun haben (vgl. Tabelle 1).

Tabelle 1

umschrieben	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Ikosaeder	Dodekaeder
eingeschrieben	Oktaeder	Tetraeder	Ikosaeder	Tetraeder	Oktaeder
	Ikosaeder	Ikosaeder			Hexaeder
		Doedekaeder			Oktaeder

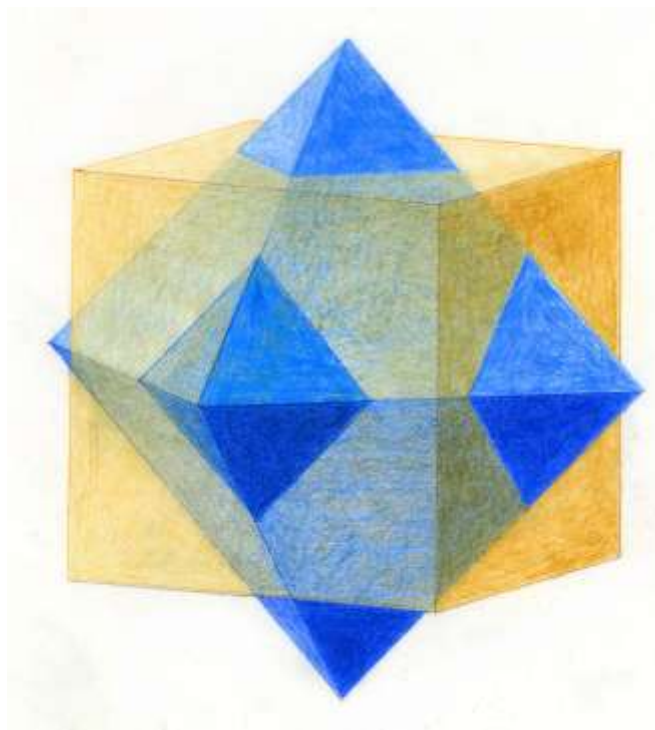
In diesen 10 Einschreibungen liegen entweder Ecken auf Ecken, Ecken auf Kanten oder Flächen verdreht in Flächen. Interessanterweise stehen alle diese Möglichkeiten im Zusammenhang mit dem goldenen Schnitt.

Kepler konnte in seiner Sphärentheorie infolge der durch die Planetenabstände gegebenen Reihenfolge die symbolische Bedeutung der platonischen Körper nicht oder nur ungenügend berücksichtigen. Er hat aber die uralte Symbolik niemals vergessen, denn in seinem Spätwerk "harmonices mundi" versieht er

die Abbildungen der platonischen Körper mit unmissverständlichen Zeichen der Zuordnung zu den von Platon und Aristoteles manifestierten "Elementen".

Die vielfältigen Umschreibungs- und Durchdringungsmöglichkeiten der platonischen Körper gestatten es, diese so anzuordnen, dass ihre Symbolik sich in der räumlichen Anordnung widerspiegelt. Als Ausgangspunkt dient das Hexaeder, als Symbol der festen Materie des Planeten Erde. Da nun die gasförmige Atmosphäre des Planeten zusammen mit der festen Materie das Gesamtbild des Planeten ausmacht, wäre es falsch, wenn das Oktaeder als Symbol des gasförmigen Materiezustandes das Hexaeder umschlüsse. Deshalb soll das Oktaeder das Hexaeder durchdringen und zwar so, dass die Kanten des Oktaeders von den Flächen des Hexaeders im goldenen Schnitt geschnitten werden (vgl. Figur 3)

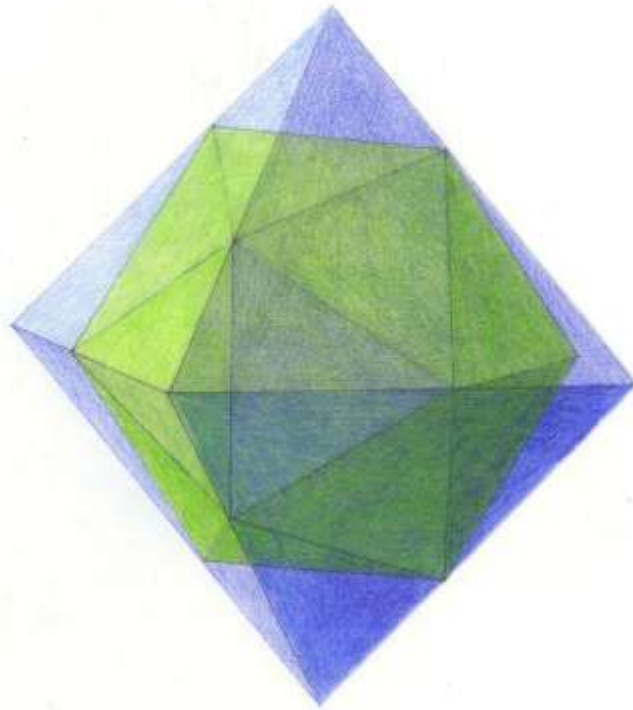
Figur 3



Der Grund für diese Proportionierung ist der, weil auf diese Weise die Verbindungen eines Teils der Schnittpunkte von Hexaeder und Oktaeder die Hülle eines Ikosaeder ergeben. Das Symbol des Flüssigen wird somit von den Symbolen für feste Materie und gasförmiger Materie umschlossen. Genau genommen ergeben alle Schnittpunkte zwei sich gegenseitig durchdringende Ikosaeder, also sozusagen einen Ikosaederzwilling. Diese geometrische Tatsache könnte so ausgelegt werden, dass das Flüssige in zwei Formen auftreten kann: einerseits als geschmolzene feste Materie und andererseits als zu Flüssigkeit komprimierte Form von Gasen. Die Ecken des Ikosaeders schneiden die Kanten des umschließenden

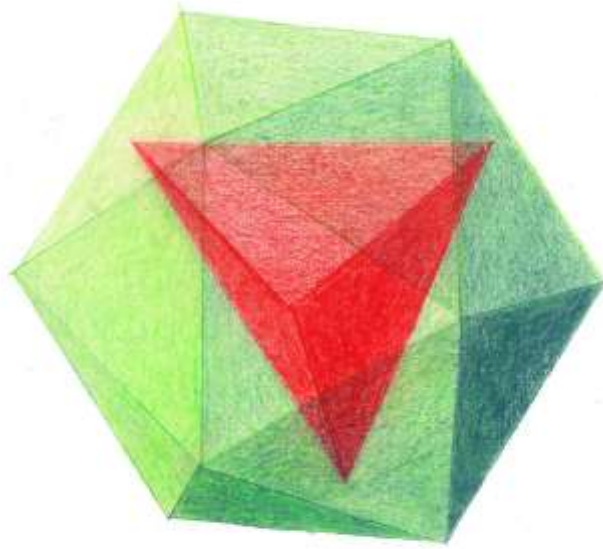
Oktaeders im goldenen Schnitt. Dabei liegen die Flächen des Ikosaeders verdreht in den Flächen des Oktaeders. Zudem entsprechen die Ikosaederkanten dem grösseren Teil der im goldenen Schnitt geteilten Hexaederkanten vgl. Figur 4).

Figur 4

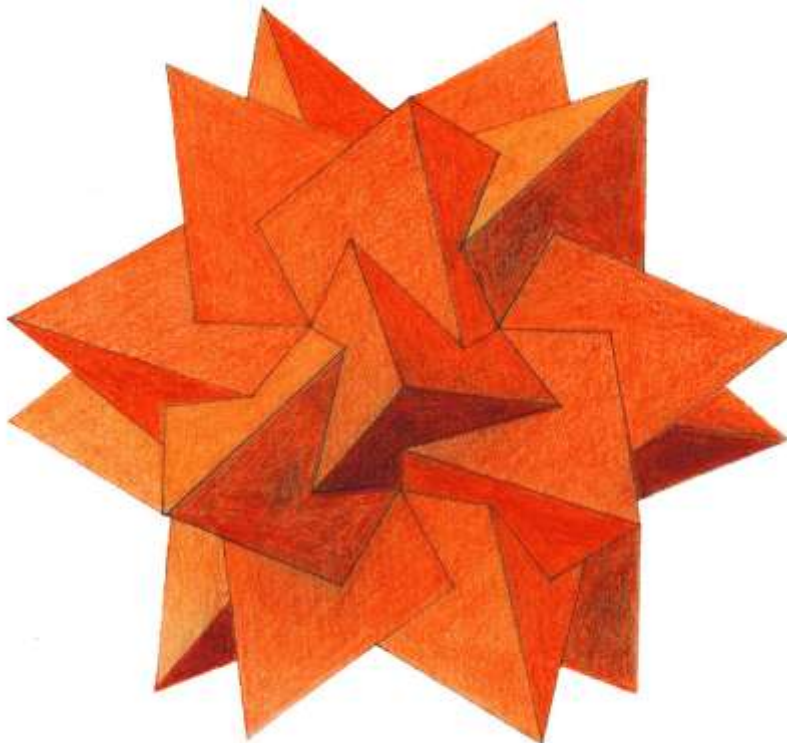


Als letztes Element lässt sich nun das Tetraeder als Symbol der chemischen und nuklearen Prozesse in das Ikosaeder einbetten, wobei alle seine Ecken mit den drei vorangehenden Körpern in Berührung treten (vgl. Figur 5). Doch damit nicht genug, denn in das Ikosaeder lassen sich insgesamt 5 Tetraeder linksläufig und 5 rechtsläufig einschreiben. Dieser Tetraederfünfling, welcher von W. Brückner und von H.S.M. Coxeter als Sternform des Ikosaeder erkannt wurde ist eines der auffälligsten Gebilde der Polyedrie. Alle Beziehungen seiner Kanten haben mit dem goldenen Schnitt zu tun (vgl. Figur 6).

Figur 5



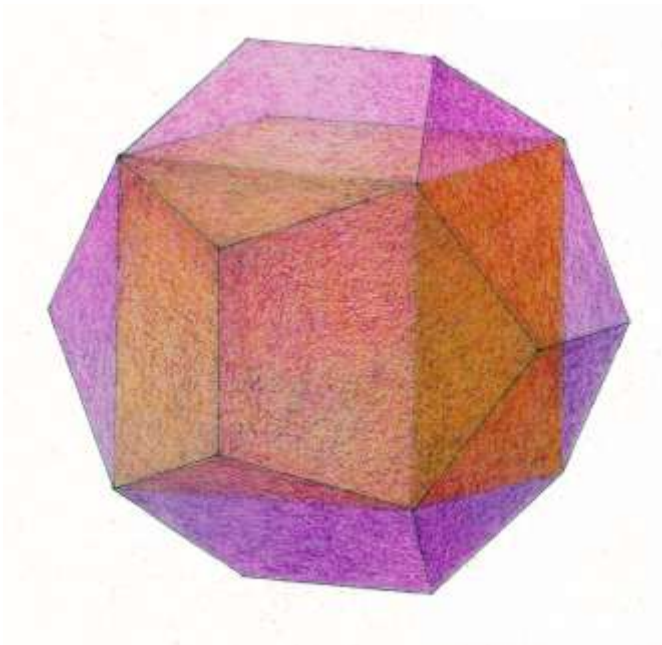
Figur 6



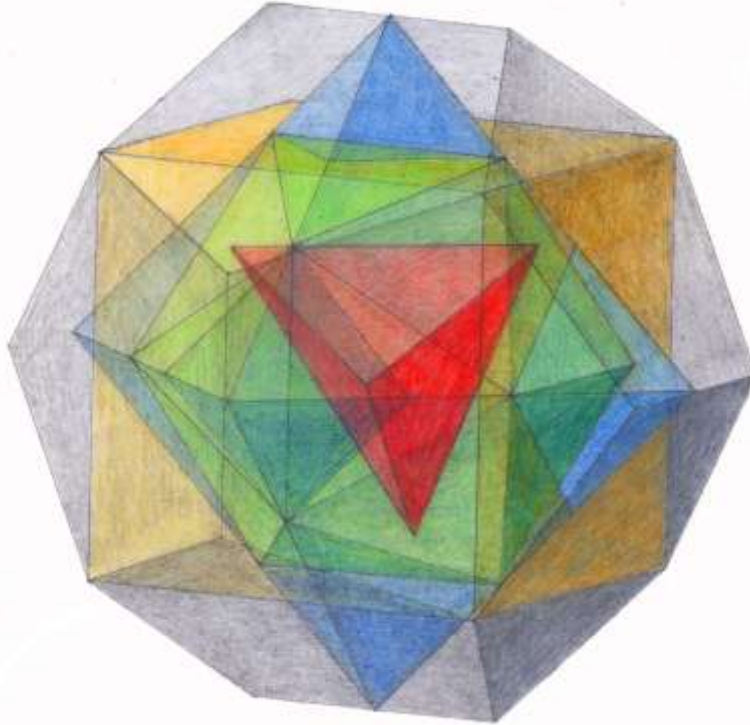
Am Tetraederfünfling kann man das Symbol des Feuers so richtig empfinden. Ob es fünf Arten von Feuer oder gar deren zehn gibt, kann man nur erahnen. Die Physiker der neusten Zeit haben jedenfalls schon eine ganze Reihe verschiedenartiger "Feuerlein" entzündet.

Das bisherige Gebilde beinhaltet nun die vier irdischen Elemente in einer, ihrer Symbolik einigermaßen entsprechenden Verschachtelung. Es fehlt aber noch der Aether, die geistige Welt, welche alles umschliessen soll. Euklid hat in Buch XIII L.17 seiner Elemente gezeigt, wie aus einem Hexaeder ein Pentagondodekaeder konstruiert werden kann, wobei wiederum der goldene Schnitt eine wichtige Rolle spielt. Diese Umschreibung des Hexaeders durch ein Dodekaeder auf euklid'sche Art ermöglicht die Fertigstellung des "Elementgebildes" aus ineinander geschachtelten platonischen Körpern (vgl. Figur 7). Der ganze Vorgang erinnert ein wenig an das alte russische Puppenspiel, wo mehrere Puppen liebevoll ineinander gefügt liegen, schützend umhüllt von der äussersten und folglich grössten. Ebenso schützend und liebevoll umhüllt im "Elementengebilde" das Dodekaeder als Sinnbild der geistigen Welt die irdischen Belange (vgl. Figur 8)

Figur 7

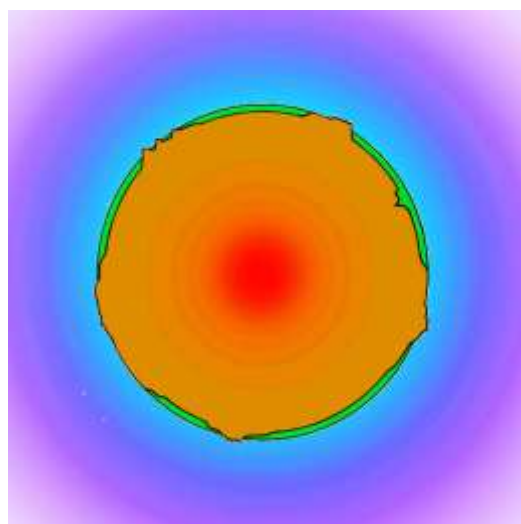


Figur 8



Um zu zeigen, wie das Gebilde aus ineinander geschachtelten platonischen Körpern mit der Wirklichkeit einigermaßen übereinstimmt, sei hier das System Erde im Massstab 1 :100'000'000 in den gleichen Farben wie Figur 9 dargestellt. Die Höhen des Festlands und die Tiefen der Ozeane wurden 50 mal überhöht, damit sie deutlich sichtbar werden.

Figur 9



Zu beachten gilt es aber auch die Tatsache, dass jedem Dodekaeder durch Verbindung seiner Flächendiagonalen insgesamt fünf Würfel eingeschrieben werden können, der sogenannte

Würfelfünfling. Ebenso verhält es sich beim Oktaeder, so dass also auch ein Oktaederfünfling existent ist. Stellt man sich vor, dass einem Dodekaeder auf diese Weise fünf Hexaeder und fünf Oktaeder, dem Hexaeder resp. Oktaeder zwei Ikosaeder und dem Ikosaeder schliesslich noch zehn Tetraeder eingeschrieben werden können, so wird das "Elementengebilde" (obwohl eine Mehrheit der Ikosaeder und Tetraeder ineinanderfallen) zu einem unvorstellbaren und kaum konstruierbaren Geflecht. Die überzeugende Einfachheit von Kepler's "Planetensphären-Gebilde" ginge durch die Ausschöpfung aller Möglichkeiten im "Elementengebilde" völlig verloren.

Alfred Hoehn

ⁱ Seit August 2006 ist Pluto kein Planet mehr