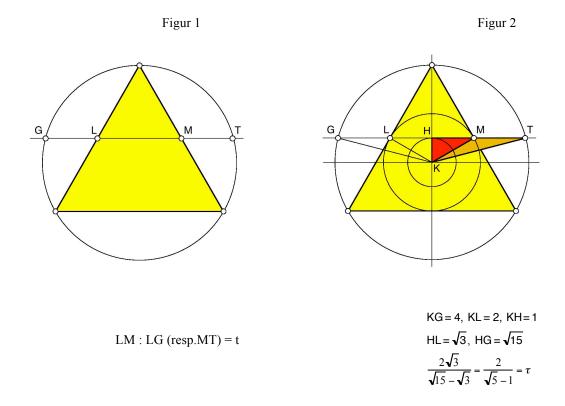
1

Konstruktion des regulären Fünfecks mit dem "rostigen Zirkel" (rusty compasses) Variante 1

Der persisch-arabische Astronom und Mathematiker Abu-l Wefa (940-997/998), welcher sich eingehend mit Konstruktionen mit dem "rostigen Zirkel", d.h. mit einem festen Kreisradius und Lineal beschäftigt hat, soll unter anderem auch eine solche Methode für das reguläre Fünfeck gefunden haben. Obwohl W. Gardner [GA] die Konstruktion des Abu-l Wefa erwähnt, aber leider nicht bringt, konnte ich die geometrische Konstruktion nirgends fingen. Ich kann aber in der Folge einen eigenen Vorschlag machen, ohne allerdings zu behaupten, dass diese Konstruktion nicht schon von anderen Autoren gefunden wurde.

Die nicht sehr bekannte Tatsache, dass die Mittelparallele eines gleichseitigen Dreiecks von den Dreicksseiten und dem Umkreis im Goldenen Schnitt geschnitten wird, eröffnet gute Möglichkeiten, das reguläre Fünfeck mit dem "rostigen Zirkel", d. h. mit Kreisen des gleichen Radius und Lineal zu konstruieren. Der Goldene Schnitt im gleichseitigen Dreieck wurde vermutlich um 1980 von George Odom entdeckt und von Albrecht Beutelspacher [BE] zum ersten mal in der deutschen Literatur beschrieben. Beutelspacher bringt an gleicher Stelle auch einen Beweis für die Konstruktion von Odom. H.S.M. Coxeter pflegte zum Künstler George Odom freundschaftliche Beziehungen. Bei Coxeter [CO] kann man vermuten, dass ihm diese Art der Goldenen Schnitts ebenfalls bekannt war. Beutelspacher macht die bemerkenswerte Aussage: "es ist erstaunlich, dass diese wunderschöne Konstruktion nicht 2000 Jahre früher gefunden wurde".



Figur 1 zeigt die Odom'sche Konstruktion. Figur 2 zeigt dasselbe mit dem Inkreis des Dreiecks und einem Kreis mit dem halben Radius des Inkreises. Ausserdem sind in Figur 2 noch die zum Verständnis der Fünfeckkonstruktion

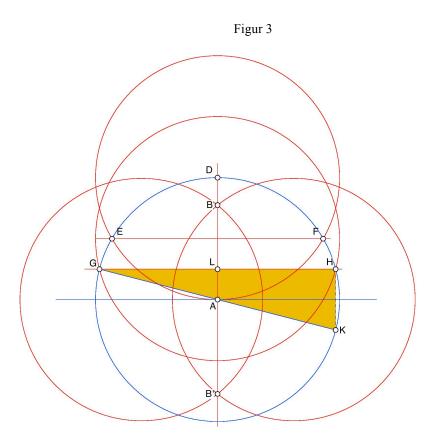
nötigen rechtwinkligen Dreiecke eingezeichnet. Die Bezeichnungen der einzelnen Punkte korrespondieren mit denen in Figur 3, (vgl. auch [AH]).

Man sieht aus den Figuren 1, 2 und 3, dass sich die Punkte G, L, M und T entsprechen und dass die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks GKH dem Radius des Umkreises des gleichseitigen Dreiecks (rot) entspricht. Die kleine Hypotneuse HK entspricht einem Viertel des Umkreisradius und demnach gilt

für die Proportion Hypotenuse zu kleiner Kathete 4: 1. Aus Figur 2 kann man auch ableiten, dass drei konzentrische Kreise, von denen jeder den doppelten Radius des nächst kleineren hat, eine Konstruktion des Goldenen Schnitts nach George Odom ermöglichen, denn jede beliebige Tangente am innersten Kreis (orange) bildet eine Sekante am mittleren und am äusseren Kreis. Die Sekante am mittleren Kreis steht zum Sekantenabschnitt am äusseren Kreis im Goldenen Schnitt. Diese Tatsache ermöglicht die Konstruktion des regulären Fünfecks mit dem "rostigen Zirkel".

Die Konstruktion:

Zunächst gilt es, das rechtwinklige Dreieck GKH mit der erwähnten Proportion 4:1 für Hypotenuse zu kleiner Kathete zu konstruieren (vegl. Figur 3):



Zeichne eine waagrechte Gerade.

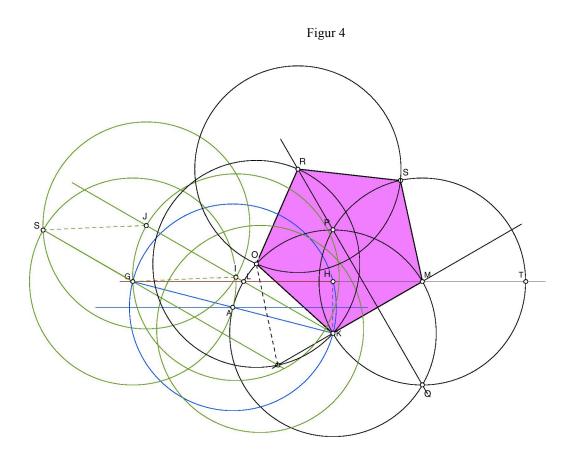
Lege den zu verwendenden Kreisradius, welcher zugleich die gegebene Seite des Fünfecks ist, fest. Errichte mittels dieses Radius und den Hilfspunkten B und B' eine Senkrechte über der Geraden. Dies ergibt Punkt A. Schlage den Kreis um A. Dies ergibt Punkt D.

Errichte die Mittelsenkrechte von AD. Dies ergibt E und F.

Errichte nochmals eine Mittelsenkrechte zu AC. Dies ergibt die Punkte G und H.

Lege eine Gerade durch G und A. Dies ergibt Punkte K auf dem Kreis.

Die Gerade durch H und K braucht es nicht zur Konstruktion, aber sie zeigt das gesuchte rechtwinklige Dreieck. Das waren die Vorbereitungen.



Nun schlage um K den Kreis und du erhältst L und M.

Vergleiche mit Figur 1 und 2 und stelle fest: LM : LG = t.

Das war die Konstruktion des Goldenen Schnitts, der für das reguläre Fünfeck unumgänglich ist.

Ziehe nun durch K und M und ebenso durch K und L eine Gerade.

Die Strecke KM ist eine Seite des zu konstruierenden Fünfecks.

Nun gilt es, die sich im Goldenen Schnitt befindlichen Strecken auf der Geraden c auf die Gerade durch K und M zu projizieren, indem du durch G eine Parallele zu der Geraden durch KL konstruierst.

Eine der Möglichkeiten, dies mit dem "rostigen Zirkel" zu tun, ist in Figur 4 grün eingezeichnet,

Auf der Geraden durch K und M erhältst du Punkt N. Dieser bildet zusammen mit den Punkten K und L ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel zur Basis im Goldenen Schnitt stehen, den Spitz des Pentagramms also. Schlage um N den Kreis, so erhältst du in Punkt O die dritte Ecke des Fünfecks.

Errichte zu KM die Mittelsenkrechte, indem du um M den Kreis schlägst. Du erhältst P und Q. Ziehe durch diese beiden Punkte eine Gerade.

Der Kreis um O ergibt R und der Kreis um R ergibt schliesslich S. R und S sind die restlichen Ecken des Fünfecks KMSRO.

Und nun viel Vergnügen beim Konstruieren

Alfred Hoehn

Basel, im März 2003

GA Martin Gardner, Mathematischer Zirkus, Augsburg, 1991, S. 231 f.

BE A. Beutelspacher/B. Petrie, Der Goldene Schnitt, Mannheim, 1988, S. 22 f

CO H.S.M. Coxeter, Regular Polytopes, New York, 1973, S. 96 ff.

AH Alfred Hoehn, der wiedergefundene Schatz http://www.alfredhoehn.ch/Texte Index.htm